تقرير عام لمشروع البحث Rapport général du projet PNR

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique المديرية العامة للبحث العلمي و التطويس التكنولوجي Direction Générale de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique

I-IDentification du projet:

PNR Code 8/U24/1070

SCIENCES FONDAMENTALES

1-التعريف بالمشروع

Organisme pilote

ATRST Ex ANDRU

Domiciliation du projet :

Laboratoire de Mécanique et Structures (LMS), Equipe Systèmes Mécaniques Lubrifiés (SML)

Université 8 mai 1945 Guelma

عنوان المشروع عنوان المشروع

Homogénéisation des Equations de Reynolds Newtonienne et Non Newtonienne : Application à la résolution des problèmes des écoulements de films minces visqueux compressibles et incompressibles entre parois rugueuses.

Chercheurs impliqués dans le projet

أعضاء المشروع و المؤسسة المستخدمة

Nom et prénom	Grade	Etablissement employeur	Observation
الاسم و اللقب	الرتبة	المؤسسة المستخدمة	
LAHMAR Mustapha	Pr	Université 8 mai 1945 Guelma	Porteur du PNR
BOU-SAID Benyebka	MC-HDR	INSA de Lyon	Membre
ELLAGOUNE Salah	Pr	Université 8 mai 1945 Guelma	Membre
BOUCHERIT Hamid	MC-A	Université 8 mai 1945 Guelma	Membre
MOUASSA Ahcene	MC-B	Université 8 mai 1945 Guelma	Membre
BENSOUILAH Hamza	МС-В	Université 8 mai 1945 Guelma	Membre

Déroulement du projet :

Rappeler brièvement les objectifs du projet et les tâches prévues

تذكير مختصر بأهداف المشروع و المهام المسطرة:

Les objectifs de ce projet sont le développement de méthodes et moyens de simulation numérique basées sur l'application de la théorie d'homogénéisation pour la détermination des conditions de fonctionnement des paliers supports de ligne d'arbre en rotation, paliers lubrifiés à l'aide de fluide compressible ou incompressible dont le comportement rhéologique peut être newtonien ou non newtonien.

On s'est attaché particulièrement à des situations critiques où ces conditions de fonctionnement sont sévères c'est-à-dire précisément quand les rugosités des surfaces en contact doivent être prises en considération et que les contraintes de cisaillement dans le fluide incompressible ne permettent plus l'hypothèse newtonienne. Les approches proposées dans ce projet ont permis le développement de logiciels de calcul qui peuvent prédire les caractéristiques statiques et dynamiques de paliers compliants fonctionnant en régime dynamique dans les situations décrites précédemment. Ces logiciels peuvent être utiles en bureau d'études soit pour un avant-projet de machines tournantes (turbomachines) soit pour la détection de risque de dysfonctionnement.

TABLE DES MATIERES

	Page
Préambule	7
INTRODUCTION GENERALE	8
CHAPITRE I: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	12
I.1 Introduction	12
I.2 description des surfaces	12
I.2.1 Etat structural des surfaces	12
I.2.2 Etat géométrique des surfaces	14
I.2.3 Mesure des défauts	15
I.2.4 Caractérisation des surfaces : Principaux paramètres statistiques	16
I.2.5 Topographie des surfaces	20
I.2.6 Modélisation de la rugosité des surfaces	24
I.3 Méthodes d'analyse des contacts rugueux lubrifiés	27
I.3.1 Méthode stochastique	28
I.3.2 Méthode déterministe	29
I.3.3 Méthode d'homogénéisation	30
I.4 Composition chimique et comportement rhéologique des huiles	31
I.4.1 Huiles de base	32
I.4.2 Les additifs ou dopes	34
I.4.2.1 Additifs améliorant la stabilité chimique de l'huile ou inhibant les effets des produits de dégradation	34
I.4.2.2. Les additifs améliorant les propriétés rhéologiques des lubrifiants	35
I.4.2.3. Les additifs extrême pression (EP) et anti-usure	36
I.5. Viscosité des lubrifiants	36
I.5.1. Définition de la viscosité	36
I.6 Comportements rhéologiques des huiles lubrifiantes	37
I.6.1 Equations constitutives	38
I.6.2. Fluide newtonien	38
I.6.3. Fluides non newtoniens	39
I.6.3.1. Fluide polaire	39
I.6.3.2 Fluides visqueux non linéaires	40
I.7 Conclusions	43

CHAPITRE II : Théorie de la lubrification hydrodynamique par fluide newtonien en régime d'écoulement laminaire	44
II.1 Introduction	44
II.2 Equations générales de la dynamique des fluides visqueux	45
II.3 Analyse dimensionnelle	47
II.4 Equations de la lubrification hydrodynamique par fluide incompressible	50
II.4.1 Fonction de dissipation en variables dimensionnées	50
II.4.2 Equation de la mécanique des films minces visqueux généralisée	50
II.4.3 Equation de la mécanique des films minces visqueux	54
II.4.4 Equation de Reynolds généralisée	56
II.4.5 Equation de Reynolds	58
II.4.6 Conditions limites associées à l'équation incompressible	59
II.5 Calcul des performances hydrodynamiques	62
II.5.1 Champ de pression dans le film	62
II.5.2 Action du fluide sur les surfaces du contact	62
II.5.3 Vitesses moyennes de l'écoulement et débit de fuite	64
II.5.4 Puissance dissipée	65
II.6 Conclusion	65
CHAPITRE III: HOMOGENEISATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS NEWTONIENNE	66
III.1 Introduction	66
III.2 Application de la méthode déterministe à la résolution de l'équation de Reynolds	67
III.2.1 Equation de Reynolds en régime stationnaire et équation géométrique du film	67
III.2.2 Application au patin incliné de Mitchell (3D)	67
III.2.3 Application au patin incliné (2D)	70
III.3 Application de la méthode d'homogénéisation	72
III.3.1 Solutions numériques des problèmes local et global	75
III.3.2 Algorithme d'homogénéisation	77
III.4 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées	78
III.5 Conclusion	91
CHAPITRE IV : Théorie de la lubrification hydrodynamique par fluide non newtonien à couple de contraintes (fluide polaire)	92
IV.1 Introduction	92
IV.2 Bilan des efforts agissant sur un élément de fluide polaire	93
IV.3 Equations de mouvement d'un fluide polaire	94

IV.4 Lois de conservation d'énergie pour un fluide polaire		
IV.5 Equations constitutives d'un fluide polaire		
IV.6 Equations de mouvement d'un fluide polaire		
IV.7 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée	101	
IV.8 Equation géométrique du film	102	
IV.9 Performances hydrodynamiques du contact	103	
IV.9.1 Portance hydrodynamique	103	
IV.9.2 Forces de frottement	104	
IV.9.3 Vitesses moyennes de l'écoulement et débit de fuite	104	
IV.9.4 Puissance dissipée	104	
IV.10 Conclusion	105	
CHAPITRE V: HOMOGENEISATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS NON NEWTONIENNE	106	
V.1 Introduction	106	
V.2 Equations de base de la lubrification hydrodynamique	106	
par fluide à couple de contrainte		
V.3 Application au patin incliné	107	
V.3.1 Cas du patin de dimensions finies (3-D)	107	
V.3.2 Cas du patin de largeur infinie (2-D)	107	
V.4 Application de la méthode d'homogénéisation	108	
V.5 Etude paramétrique	109	
V.6 Conclusion	114	
Références bibliographiques des chapitres I à V	115	
Principales notations utilisées dans les chapitres I à V	118	
CHAPITRE VI: THEORIE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE EN REGIME TURBULENT: APPLICATION AUX PALIERS CYLINDRIQUES RUGUEUX	120	
VI.1 Introduction	120	
VI.2 Approche utilisant la longueur de mélange	121	
VI.3 Equations de Reynolds	122	
VI.4 Modèle de Boussinesq	125	
VI.5 Equations de Reynolds pour un écoulement en film mince	125	
VI.6 Approche basée sur des considérations empiriques	128	
VI.7 Transition entre les différents régimes d'écoulement	131	
VI.7.1 Transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor	132	
VI.7.2 Transition entre le régime des tourbillons de Taylor et le régime turbulent	133	

VI.8 Conclusion	133	
CHAPITRE VII: HOMOGENEISATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS TURBULENTE	134	
VII.1 Introduction	134	
VII.2 Introduction de l'équation de Reynolds turbulente		
VII.3 Equation géométrique du film		
VII.4 Caractéristiques hydrodynamiques homogénéisées	139	
VII.4.1 Pression homogénéisée	139	
VII.4.2 Débit volumique homogénéisé	139	
VII.4.3 Force de frottement homogénéisée	141	
VII.4.4 Portance hydrodynamique homogénéisée	141	
VII.5 Algorithme d'homogénéisation	142	
VII.6 Conclusion	142	
CHAPITRE VIII: COMPARAISON ENTRE LES SOLUTIONS DIRECTES ET HOMOGENEISEES D'UN PALIER HYDRODYNAMIQUE RUGUEUX EN REGIMES LAMINAIRE ET TURBULENT	143	
VIII.1 Description d'un palier hydrodynamique	143	
VIII.2 Equations géométriques du film	145	
VIII.2.1 Cas du palier cylindrique	145	
VIII.2.2 Equation de Reynolds turbulente pour un palier cylindrique	145	
VIII.3 Solutions directe et homogénéisée	147	
VIII.4 Comparaison des solutions directes et homogénéisées	147	
VIII.5 Application de la méthode d'homogénéisation à l'étude des effets de la rugosité et de la turbulence sur la pression et la capacité de charge d'un palier	155	
VIII.6 Conclusion	156	
Références bibliographiques utilisées dans les chapitres VI à VIII	158	
Principales notations utilisées dans les chapitres VI à VIII	159	
Conclusions générales	162	
Références complémentaires	165	
ANNEXE A	166	

Analyse dimensionnelle des équations de mouvement d'un fluide polaire

Préambule

La plupart des modèles de contacts lubrifiés, rencontrés dans les éléments de machines industrielles tels que les paliers fluides, les butées fluides, les roulements, les engrenages et les garnitures d'étanchéité, sont basés sur plusieurs hypothèses parmi lesquelles les surfaces formant ces contacts sont parfaitement lisses et le lubrifiant s'écoulant entre ces surfaces possède un comportement newtonien; c'est-à-dire les contraintes de cisaillement dans le fluide sont reliées de façon linéaire aux gradients de vitesse ou taux de cisaillement. Cependant, il a été montré que pour des contacts lubrifiés par exemple à l'aide des huiles dopées (huiles multigrades) et fonctionnant dans des conditions sévères (charges et vitesses élevées), ces hypothèses sont mises en défaut. Sur le plan industriel, la prise en compte de la texture et de la topographie réelle des surfaces formant les contacts, et le comportement rhéologique plus complexe du lubrifiant est indispensable tant pour une bonne prédiction des performances que pour une estimation précise de la durée de vie d'un système mécanique lubrifié. L'étude proposée dans le cadre de ce projet constitue une étape vers une meilleure connaissance du comportement des contacts rugueux rencontrés dans les systèmes mécaniques lubrifiés par des fluides à rhéologie complexe dont le comportement est non newtonien. Elle est basée sur l'application du processus d'homogénéisation à l'équation de base de la lubrification connue sous le nom d'équation de Reynolds modifiée obtenue à partir des équations de mouvement d'un fluide polaire incompressible de V. K. Stokes en vue de prendre en considération les couples de contrainte dus à la présence des additifs de viscosité dans le lubrifiant. La dérivation de cette équation est effectuée à partir des équations de la dynamique des fluides et de l'équation de conservation de la masse écrites pour un écoulement laminaire ou turbulent de film mince moyennant des analyses dimensionnelles.

L'introduction des variables locales et le développement multi-échelle de la pression hydrodynamique crée dans le film conduit à l'écriture d'un système de quatre équations aux dérivées partielles gouvernant un problème local et un problème global dont les solutions sont les fonctions périodiques et la pression homogénéisée. La connaissance de ces solutions permettra de déterminer les performances du contact, à savoir : la portance du film, la puissance dissipée, le débit de fuite, le nombre de frottement, etc.

Dans le cas d'une butée hydrodynamique à patins inclinés (blochet) fonctionnant en régime laminaire, les études de simulation ont été effectuées en considérant quatre formes de rugosités (transversales, longitudinales, isotropes et anisotropes) distribuées de façon périodique sur les surfaces, et différentes valeurs du paramètre de couple de contrainte représentant physiquement la longueur de la chaine moléculaire du polymère incorporé dans le lubrifiant (huile dopée).

La théorie d'homogénéisation a été aussi appliquée à l'étude des paliers cylindriques rugueux fonctionnant en régime turbulent dans le cas d'un fluide newtonien. Ce travail a fait l'objet d'une publication et d'une communication internationales.

Introduction générale

Un système mécanique est constitué d'un ensemble de pièces liées entre elles qui sont en mouvement les unes par rapport aux autres. Ces pièces sont séparées partiellement ou complètement par un film lubrifiant facilement cisaillable afin d'éviter une usure trop rapide ou un risque de grippage.

Les pièces mécaniques manufacturées sont limitées par des surfaces qui ne sont jamais conformes à celles géométriquement idéales représentées sur les dessins de définition et de fabrication. En effet, elles présentent des défauts de nature géométrique et physico-chimique résultant du procédé de fabrication utilisé et du matériau constituant ces pièces. Ces défauts ou irrégularités géométriques se classent conventionnellement sous six numéros d'ordre. Parmi ces défauts, les défauts de forme et de rugosité, qui sont dus principalement aux vibrations relatives entre l'outil et la pièce usinées ainsi qu'à la rigidité de la machine-outil, sont les plus intéressants du point de vue tribologique.

La détermination théorique des performances d'un contact lubrifié dépend entre autres, d'une caractérisation rigoureuse des surfaces formant le contact et d'une modélisation aussi fidèle que possible du comportement rhéologique du lubrifiant surtout lorsque les conditions de fonctionnement du contact sont sévères (charge et vitesse élevées). A cette fin, le modèle mathématique établi par Osborne Reynolds en 1886 représenté par une équation aux dérivées partielles connue communément sous le nom de l'équation de Reynolds permet de prévoir le comportement des contacts lubrifiés. La résolution de cette équation permet de déterminer le champ de pression dans un contact lubrifié et ainsi ses caractéristiques de fonctionnement, à savoir : la capacité de charge, le débit, la puissance dissipée, le nombre de frottement, etc.

La théorie de lubrification fondée par Osborne Reynolds en 1886 [1] est basée sur plusieurs hypothèses simplificatrices parmi lesquelles les surfaces sont supposées parfaitement lisses et le fluide s'écoulant entre ces surfaces possède un comportement newtonien; c'est-à-dire les contraintes de cisaillement visqueuses sont proportionnelles aux gradients de vitesse de l'écoulement. Dans la littérature technique, plusieurs investigateurs ont montré que de telles hypothèses sont peu réalistes surtout pour l'étude des contacts sévèrement chargés fonctionnant avec de faibles épaisseurs de film. Les lubrifiants modernes qui se caractérisent par une composition chimique complexe tels que les huiles multigrades incorporent une large variété d'additifs ou dopes. Ils ont pour but essentiel d'améliorer les performances des huiles de base d'origine minérale obtenues à partir du raffinage du pétrole brut. Parmi ces additifs, nous trouvons les additifs améliorants de l'indice de viscosité V. I. (Viscosity Index Improvers) qui entrent à hauteur de 5 à 15% dans la composition chimique du lubrifiant. Plus le VI est élevé meilleur est le comportement de la viscosité du lubrifiant vis-à-vis de la température. Parmi les différents types d'additifs de VI commercialisés, nous distinguons deux grandes familles, à savoir : les polymères d'oléfines, les polyacrylates et les polyméthacrylates. De part leur concentration élevée, les additifs de viscosité influent d'une manière significative sur le comportement rhéologique du lubrifiant. Ainsi, l'amélioration des performances en température obtenue grâce à l'apport des additifs de viscosité s'est accompagnée d'une modification du comportement rhéologique du lubrifiant. Une relation linéaire entre les taux de déformation et les contraintes ne suffit pas alors de décrire le lubrifiant. Son comportement est dénommé d'une manière générale non newtonien.

Les nombreux modèles proposés dans la littérature technique à la suite d'études théoriques et expérimentales mettent en évidence la diversité et la complexité du comportement rhéologique des fluides non newtoniens. Chacun de ces modèles dépend éventuellement de la composition chimique du fluide et des conditions de fonctionnement du mécanisme lubrifié par ce fluide. L'utilisation des modèles à comportement complexe est donc vivement conseillée pour calculer plus correctement les caractéristiques d'un contact lubrifié par des fluides particuliers tels que les huiles multi-grades qui sont des lubrifiants additivés ou dopés.

Dans la présente étude, nous avons retenu le modèle de V. K. Stokes pour décrire l'écoulement des lubrifiants dopés dans le contact. Ce modèle, qui tient compte des effets des couples de contrainte dus à la présence des additifs dans le fluide lubrifiant, permet de caractériser le fluide à l'aide de deux constantes physiques qui sont la viscosité dynamique du lubrifiant et une deuxième caractéristique responsable du couple de contrainte dans le fluide. Cette dernière est négligée par la théorie de la mécanique des milieux continus classique qui ne tient pas en compte la taille des particules de fluide.

En régime isotherme, l'application des lois fondamentales de la mécanique des milieux continus de V. K. Stokes, à savoir les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement à l'étude des écoulements de films minces visqueux entre des parois lisses ou rugueuses permet de dériver une équation aux dérivées partielles linéaire de type elliptique appelée équation de Reynolds modifiée dont l'inconnue principale est la pression. Cette équation qui n'admet pas de solution analytique sera résolue numériquement à l'aide de la méthode des différences finies ou des éléments finis.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour l'étude des effets des rugosités de surface sur les performances des contacts hydrodynamiques, à savoir : la méthode stochastique, la méthode déterministe ou directe et plus récemment la technique d'homogénéisation. Par comparaison aux modèles stochastiques, les modèles déterministes permettent de prendre en compte de manière plus réaliste la texture et la microtopographie des surfaces dans les études de simulation. Cependant, l'approche déterministe nécessite un espace mémoire important et de grands efforts de calcul car il faut raffiner au maximum le maillage pour pouvoir décrire les plus petites ondulations de la rugosité.

La méthode d'homogénéisation dite aussi méthode de moyennisation est une théorie mathématique qui inclut l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients à oscillation rapide. Depuis quelques décennies, cette méthode a été utilisée avec succès pour le traitement des problèmes ayant trait, par exemple, à l'élasticité des milieux anisotropes tels que les matériaux composites ainsi que les milieux poreux. En revanche, cette méthode n'est pas fréquemment utilisée dans le domaine de la tribologie. Récemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'application du concept d'homogénéisation dans les études de simulation des problèmes de lubrification par fluides compressibles et incompressibles dont le comportement peut être newtonien ou non

newtonien. L'approche d'homogénéisation, basée sur un développement multi-échelle de la pression, consiste à réécrire le problème posé en deux autres :

- Un problème local (échelle microscopique) gouverné par 3 équations aux dérivées partielles du second ordre dont les inconnues sont les fonctions périodiques locales.
- Un problème global (échelle macroscopique) régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée supposée nulle sur la frontière du domaine global.

La difficulté majeure de cette technique réside dans le découplage des deux problèmes à partir du problème global. Les coefficients du problème homogénéisé dépendant de la solution locale et ne peuvent être calculés qu'après traitement du problème local. Par comparaison à la méthode directe, la technique d'homogénéisation ne nécessite pas de maillages très fins pour prendre en compte l'effet de la rugosité car cette dernière est prise en compte pendant la résolution des problèmes locaux sur la cellule unitaire.

A partir de la recherche bibliographique effectuée sur les différentes méthodes d'analyse, il ressort que la méthode d'homogénéisation s'avère être une alternative intéressante à la méthode directe spécifiquement dans le cas de rugosités périodiques car elle ne nécessite qu'une allocation mémoire réduite. De plus, elle présente des résultats plus réalistes comparés à ceux issus des approches stochastiques qui sont généralement basées sur une génération automatique de surfaces gaussiennes ou non gaussiennes.

La méthodologie adoptée dans cette recherche comprend les étapes suivantes :

Etape 1: Etude bibliographique portant sur la caractérisation et la modélisation des surfaces technologiques ou industrielles (engineering surfaces), les différentes techniques de mesure de la rugosité, les techniques de mesures rhéologiques (rhéométrie, viscosimétrie, ...), les lois de comportement rhéologique des huiles lubrifiantes proposées dans la littérature ainsi que la description des différentes méthodes d'analyse proposées dans la littérature technique pour l'étude des contacts lubrifiés dont les surfaces sont rugueuses.

Etape 2:

- Ecriture des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus décrivant le comportement des fluides polaires non newtoniens de V. K. Stokes.
- Dérivation de l'équation de la mécanique des films minces visqueux (équation de Reynolds modifiée)
 qui va être utilisée au cours de notre étude pour déterminer les caractéristiques d'écoulement de films minces entre parois mobiles en régimes laminaire et non laminaire.
- Expressions générales des caractéristiques hydrodynamiques telles que la portance hydrodynamique,
 le débit de fuite, la force de frottement et la puissance dissipée dans le contact dans le cas de fluides newtonien et non newtonien.

Etape 3:

- Application du processus d'homogénéisation à l'équation de Reynolds non newtonienne modifiée.

- Ecriture de l'algorithme d'homogénéisation et traitement numérique des équations aux dérivées partielles gouvernant le problème local (échelle microscopique) et le problème global (échelle macroscopique).
- Validation de la technique d'homogénéisation au travers une comparaison des résultats obtenus à partir de cette technique avec ceux issus de l'application de la méthode directe dans le cas de quatre modèles de rugosités (longitudinale, transversale, isotrope et anisotrope).

Etape 4:

- Etude paramétrique afin de déterminer les paramètres influençant les caractéristiques d'un contact lubrifié en conditions dites sévères.
- Traitement graphique et interprétation des résultats.
- Soumission d'articles pour publication & participation aux manifestations scientifiques.

CHAPITRE I

Etude bibliographique

I.1 Introduction

Nous présentons dans la première partie de ce chapitre, une étude bibliographique sur la caractérisation et la modélisation des surfaces technologiques (engineering surfaces) ainsi que la description des différentes méthodes d'analyse proposées dans la littérature technique pour l'étude des contacts lubrifiés dont les surfaces sont rugueuses. Ces méthodes se classent en trois catégories, à savoir : la méthode stochastique, la méthode déterministe et la méthode dite d'homogénéisation. La seconde partie est dévolue à la caractérisation des fluides utilisés comme lubrifiants dans les systèmes mécaniques.

I.2. Description des surfaces

L'étude des surfaces revêt de l'importance dans un grand nombre d'applications industrielles. Par exemple dans les procédés de fabrication par injection, le fini de surfaces du moule est un facteur important qui gouverne la qualité de la pièce. Dans certaines applications technologiques les qualités des surfaces doivent être meilleures pour garantir le bon fonctionnement du système (par exemple, le cas des pièces de frottement, d'étanchéité, de précision...). En effet, l'usure d'un joint dynamique ou d'une garniture mécanique est souvent fonction de l'état géométrique de la surface sur laquelle il vient se frotter.

En tribologie, la caractérisation, la métrologie et la simulation numérique des surfaces rugueuses constituent une étude préalable et indispensable avant d'effectuer une approche déterministe ou stochastique des contacts lubrifiés. Les techniques de caractérisation ont pour but de décrire la microtopographie des surfaces afin de mieux comprendre leurs propriétés fondamentales.

I.2.1. Etat structural des surfaces

En tribologie, une surface n'est pas une séparation sans épaisseur entre un corps solide et le milieu ambiant. Une surface possède également une épaisseur qui s'étend de l'extérieure jusqu'à l'intérieur du solide (cœur de la pièce). La figure I.1 illustre ce concept d'une façon schématique.

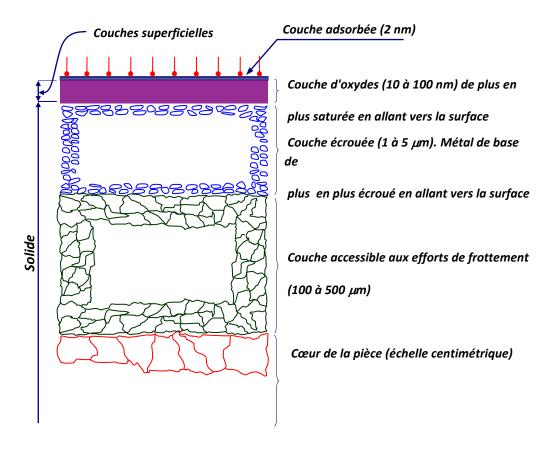


Fig. I.1 Composition schématique des couches superposées d'une surface

A l'extérieur du solide (interface surface-milieu ambiant), on retrouve inévitablement une couche d'oxydes sur le solide. Il est à noter que même des matériaux nobles comme l'or ou le platine forment une couche d'oxyde sur leur surface dans l'atmosphère. L'épaisseur et les propriétés mécaniques de la couche d'oxyde varient selon le matériau et le temps d'exposition à l'atmosphère. Cette couche, dont l'épaisseur s'échelonne entre 10 et 100 nanomètres, joue un rôle important dans le frottement et l'usure de la surface ; sans celle-ci, tous les matériaux se soudent les uns aux autres et les pièces en mouvement relatif grippent.

Sur la couche d'oxydes se trouve une couche adsorbée : oxygène, polluants atmosphériques, corps gras (lubrifiant gazeux ou liquide) et toutes sortes d'autres composants qui se trouvent dans l'environnement immédiat de la surface. La couche d'oxyde existe toujours, sauf dans le vide à température élevée (>1000 °C).

Le phénomène d'adsorption s'explique par la présence d'atomes de surface porteurs de valences non saturées créant un champ de forces au voisinage de la surface provoquant l'attraction et la fixation de molécules ambiantes. Suivant les caractéristiques des atomes en présence, ce phénomène entraine :

- Une réaction chimique (oxydation);
- Une diffusion.

Il est utile de noter que l'adsorption n'est pas uniforme ; elle est plus intense sur les reliefs.

Dans le solide, en partant des aspérités, on trouve une couche de matériau plus ou moins écrouie dont l'épaisseur varie de 1 à 5 microns. Le degré d'écrouissage et la profondeur de la couche écrouie (Beilby)

dépendent du procédé d'obtention de la pièce brute (forgeage, étirage,....), des opérations d'usinage par enlèvement de copeaux ou par électro-érosion et des traitements thermiques.

Il convient de souligner que les procédés de finition par électro-érosion (Electro-Discharge Machining) ou par enlèvement chimique causent peu d'écrouissage et ont une influence sur une faible profondeur. En revanche, les procédés d'usinage par enlèvement de copeaux causent plus de perturbations sur une plus grande profondeur.

En dessous de la couche écrouie se trouve la couche accessible de 100 à 500 microns d'épaisseur qui n'est pas influencée par les procédés de formage, d'usinage ou les phénomènes chimiques. La structure cristalline de cette couche est intacte et elle est semblable au cœur de la pièce. Les défauts de la couche accessible jouent un rôle sur le phénomène de la friction qui sont principalement : les inclusions, les trous et porosités, les ségrégations et les contraintes résiduelles provenant des traitements thermiques et du moulage formant un champ de contraintes qui s'ajoute à celles provoquées par le frottement.

I.2.2 Etat géométrique des surfaces

Les pièces mécaniques manufacturées sont limitées par des surfaces qui ne sont jamais conformes à celles géométriquement idéales représentées sur les dessins de définition et de fabrication. En effet, elles présentent des défauts de nature géométriques et physico-chimiques résultant du procédé de fabrication utilisé et du matériau constituant ces pièces.

Les caractéristiques de l'état de surface d'une pièce peuvent intervenir de façon prépondérante sur son aptitude à remplir une fonction donnée. Le terme état de surface englobe à la fois :

- l'état géométrique de la surface défini par l'ensemble des écarts géométriques de la pièce réalisée en fabrication par rapport à celle géométriquement idéale;
- l'état physico-chimique défini par les diverses caractéristiques de la couche superficielle : structure et texture cristallines, adsorption, etc.

Selon la normalisation française (NF E 05-515), les défauts ou les irrégularités géométriques de surface se classent conventionnellement sous six numéros d'ordre, à savoir:

Ordre 1: Défauts de forme et de position qui sont imputables à un manque de rectitude, à une ovalisation ou à un manque de cylindricité. Leur amplitude varie de 2.5 à plus de 100 microns et leur période est de plusieurs ordres de grandeur plus grande que leur amplitude.

Ordre 2: Défauts d'ondulation (défauts macroscopiques) possédant généralement un caractère périodique dû essentiellement à des vibrations de basses fréquences de la pièce et/ou de l'outil générateur. La période de ces défauts est de quelques ordres de grandeur plus grande que leur amplitude, soit de 0,1 à 50 microns.

Ordre 3: Stries, sillons qui sont des défauts périodiques ou pseudo-périodiques.

Ordre 4: Défauts localisés (échelle microscopique) : arrachement, marque d'outil, ... ; ce type de défaut a un caractère apériodique.

Ordre 5: Structure cristalline (échelle mésoscopique).

Ordre 6: Réseau cristallin (échelle nanoscopique).

Les défauts des 3^{ème} et 4^{ème} ordres, qui sont intéressants du point de vue tribologique, sont désignés par le terme général de rugosités. Il convient de préciser que le profil d'une surface mesuré à l'aide d'un profilographe est le résultat de la superposition des défauts de forme, d'ondulation et de rugosité figure I.2.

Les amplitudes de rugosités peuvent varier de 0,01 microns ou moins pour les surfaces polies à 25 microns pour les surfaces usinées par des procédés conventionnels.

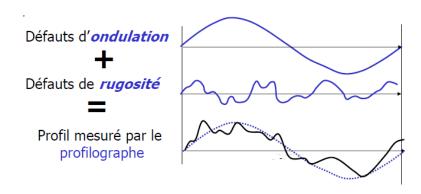


Fig. I.2 Schématisation d'un profil mesuré par le profilographe.

I.2.3. Mesure des défauts

L'étude des états de surface remonte aux années 30, avec le développement des appareils de mesure de profil. Après 1950, les premiers appareils analogiques ont fait leur apparition et permirent de mesurer quelques paramètres. Les années 70 ont vu l'apparition de nouveaux moyens informatiques et électroniques qui permirent de définir un plus grand nombre de paramètres caractérisant l'état de surface.

Aujourd'hui, les moyens métrologiques modernes et les techniques d'imagerie topographique permettent d'extraire des paramètres pertinents des surfaces industrielles.

Le profil d'une surface est le résultat de la superposition des défauts de forme (shape defects), des défauts d'ondulation (waviness defects) et des défauts de rugosité (roughness defects). Les défauts de forme sont facilement mesurés avec les instruments de métrologie classiques comme le micromètre parce que leur période est grande. La période des défauts d'ondulation et de rugosité étant plus petite, un palpeur capable de les détecter doit aussi être petit. L'appareil le plus utilisé pour cette tâche est le *profilographe* figure I.3. Cet appareil comprend un stylet durci (diamant), qui se déplace sur la surface à très basse vitesse (1 mm/s). Le stylet est terminé par une petite pointe (\approx 0,5 μ m de rayon) qui agit un peu comme un filtre à haute fréquence : les contours plus petits que le rayon de la pointe du palpeur ne sont pas enregistrés.

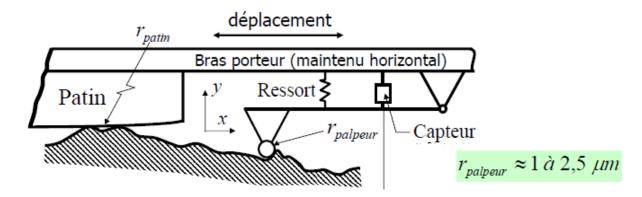


Fig. I.3 Schéma d'un profilographe

Le déplacement du stylet sur le profil est transformé en signal électrique par le capteur, numérisé et ensuite traité par un ordinateur par des techniques statistiques.

I.2.4 Caractérisation des surfaces : Principaux paramètres statistiques

La norme ISO 4287 [2-5] recense l'ensemble des paramètres géométriques et statistiques existants dans l'analyse des états de surfaces. Cette norme définit au moins 19 caractéristiques statistiques pour caractériser les surfaces.

Les paramètres statistiques les plus connus sont sans doute les coefficients R_a et R_q , qui sont définis pour une longueur de base sur une ligne de référence. La ligne de référence sépare les crêtes et les creux d'un profil de la surface en deux catégories : ceux situés au-dessus de la ligne de référence, et ceux situés en dessous. Les paramètres statistiques sont toujours calculés à partir de la ligne de référence sur une longueur caractéristique appelée longueur de base.

Définition de R_a et R_q

• Ra est la moyenne des valeurs absolues des déviations y_i du profil par rapport à la ligne de référence arithmétique figure I.4, soit :

$$R_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |y_i| \tag{I.1}$$

La ligne de référence arithmétique (ou ligne centrale) est la ligne qui divise le profil en délimitant, à l'intérieur de la longueur de base, des aires égales de part et d'autre de cette ligne.

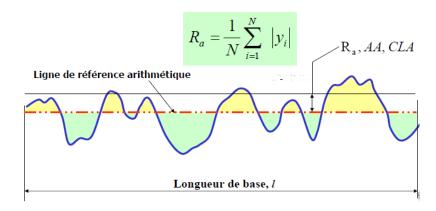


Fig. I.4 Profil de rugosité sur lequel est défini l'écart arithmétique Ra

• R_q est la moyenne RMS (Random Mean Square) des déviations du profil par rapport à la ligne de référence des moindres carrés figure I.5, soit :

$$R_q = RMS = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
 (I.2)
$$R_q = RMS = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N y_i^2\right)^{1/2}$$
 Eigne de référence des moindres carrés écarts y_i Longueur de base, l

Fig. I.5 Profil de rugosité sur lequel est défini l'écart moyen géométrique RMS

La *ligne de référence des moindres carrés* (ou ligne moyenne) est la ligne qui divise le profil en délimitant, à l'intérieur de la longueur de base, une valeur minimale de la somme des carrés des aires entre les crêtes et les creux.

Les valeurs R_a et R_q sont très proches l'une de l'autre. Malheureusement, beaucoup d'ingénieurs ne spécifient qu'une ou l'autre de ces valeurs pour caractériser le fini de surface. Ni l'un ni l'autre de ces paramètres ne sont en réalité suffisants. En effet, plusieurs formes de profil d'allure différente peuvent avoir des valeurs R_a ou R_q très voisines. Par exemple, les profils de la figure I.6 ont la même valeur R_a et R_q , mais ils présentent un comportement totalement différent en frottement et en usure.

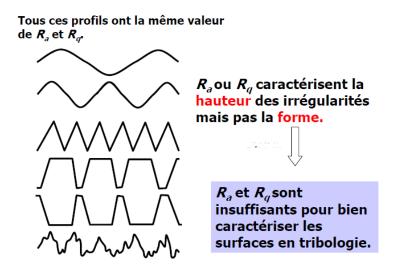


Fig. I.6 Exemple de 6 profils différents ayant les même Ra et Rq

Définition de l'obliquité (Skewness)

Pour différencier les surfaces du point de vue tribologique, il est nécessaire de calculer d'autres paramètres qui caractérisent leur topographie. L'un de ces paramètres est l'obliquité S_k figure I.7, qui correspond au moment d'ordre 3:

$$S_k = \frac{1}{R_q^3} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^3 \tag{I.3}$$

Une valeur négative de S_k indique une prédominance de vallées, tandis qu'une valeur positive est le signe de crêtes abondantes. Un profil avec une valeur de S_k négative possède un meilleur comportement au frottement, et donc à l'usure.

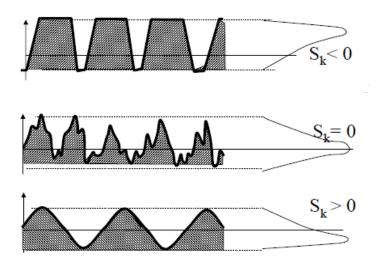


Fig. I.7 Obliquité S_k d'un profil.

Définition de l'étalement (kurtosis)

Enfin, un autre paramètre peut aussi être utilisé pour différencier la qualité du fini de surface : il s'agit de l'étalement E_k figure I.8, qui correspond à un moment d'ordre 4 du profil :

$$E_{k} = \frac{1}{R_{q}^{4}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}^{4}$$
(I.4)

Un profil avec un étalement $E_k > 3$ correspond à une surface apte à recevoir des placages, qui présente en même temps un bon comportement au frottement et à l'usure.

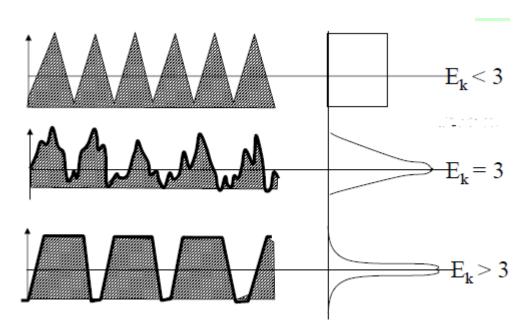


Fig. I.8 Etalement E_k d'un profil.

Longueur portante

La longueur portante d'un profil est définie à la figure I.9 comme la somme des longueurs des segments obtenus en coupant les saillies par une ligne parallèle à la ligne de référence à l'intérieur de la longueur de base. La courbe du taux de longueur portante du profil représente la relation entre le rapport de la longueur portante sur la longueur de la ligne de base avec le niveau de coupe du profil.

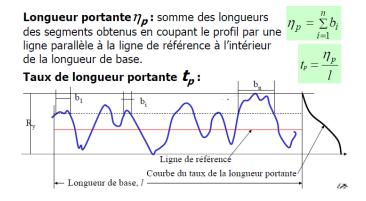


Fig. I.9 Courbe du taux de la longueur portante.

I.2.5 Topographie des surfaces

Le profilographe mesure et enregistre les variations de hauteur d'une surface sur une ligne. Les paramètres mesurés à partir de ces enregistrements ne valent aussi que sur une ligne. Cependant, les surfaces existent en trois dimensions. Pour les caractériser en trois dimensions, il faut utiliser une technique de mesure autre que le profilographe (optique, par exemple) ou effectuer plusieurs passes parallèles avec le profilographe et les juxtaposer figure I.10. Selon le procédé par lequel la surface est usinée, sa topographie en trois dimensions peut s'apparenter soit à des cylindres parallèles, soit à des sphères de différentes hauteurs figure I.10.

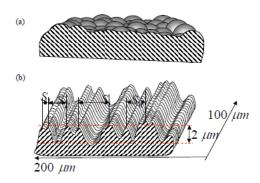


Fig. I.10 Représentation tridimensionnelle de la topographie de surface à partir de mesures réalisées avec un profilographe : a) surface usinée au tour ou à la fraise b) surface grenaillée.

Afin de comprendre les phénomènes tels que l'usure, la friction et la lubrification, la quantification de la topographie de la surface est importante. De plus, le design des surfaces esthétiques telles que les surfaces de miroir, nécessite un contrôle de la texture de la surface à une échelle très fine.

Depuis son invention par Abbot *et al.* [6] dans les années 30, la profilométrie décrite précédemment a été employée de façon extensive afin d'estimer la quantité et la fonctionnalité des surfaces industrielles.

Les différentes applications de la profilométrie ont généré de nombreux paramètres permettant de quantifier les propriétés de surface. Le paramètre le plus connu est la rugosité moyenne ou la hauteur arithmétique moyenne, R_a , qui est fréquemment utilisée, même aujourd'hui. Bien que de concept simple, R_a ne décrit pas très bien les surfaces usinées.

Avec la venue des ordinateurs puissants et les systèmes de mesure plus sophistiqués, la topographie (2D) traditionnelle a été suppléée, ou même substituée, par les techniques de mesure tridimensionnelle (3D) dans la mesure où la caractérisation des surfaces en (3D) permet des interprétations faciles et intuitives. Aujourd'hui, les techniques de mesure (3D) les plus couramment utilisées sont :

-Microscopie d'interférence :

Il s'agit d'une technique optique utilisant l'interférométrie pour déterminer la distance de l'objectif à la surface de l'échantillon. En variant la hauteur des lentilles optiques au dessus de l'échantillon et en enregistrant les franges d'interférences, une carte en hauteur est construite par l'ordinateur figure I.11.

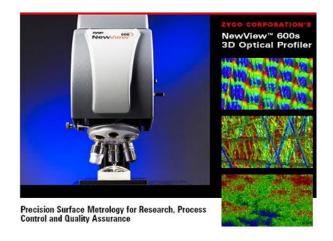


Fig. I.11 Photographie d'un microscope d'interférences.

-Microscopie à force atomique (AFM) :

La MFA (Atomic Force Microscopy, en anglais) mesure la surface à l'aide d'une pointe silicone extrêmement aiguë avec un rayon d'incurvation de quelques dizaines de nanomètres offrant une plage de résolution en nanomètres. Cette techinque extrêmement précise est utilisée pour des surfaces avec des détails et textures extrêmement fines (moins de 5 microns). La figure I.12 montre un instrument MFA numérique.



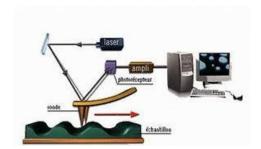


Fig. I.12 Microscope à force atomique (AFM).

- La microscopie 4-D

L'objectif de la microscopie 4-D est la mesure et la caractérisation des structures microscopiques en mouvement (Micro-Electro-Mechanical-Systems MEMS, nanotechnologies, procédés de gravure, attaques chimiques...) en utilisant la technique de la microscopie interférométrique figure I.13. Cette technique consiste à balayer en continu les franges d'interférence sur toute la profondeur de la surface à mesurer, d'acquérir les images avec une caméra rapide et d'effectuer un traitement d'images fortement parallélisé en logique câblée pour mesurer la hauteur du relief de la surface. Cette technique nous permet de réaliser aussi bien des mesures apériodiques que périodiques. La figure I.14 montre le schéma du système CAM 4-D.





Fig. I.13 Banc de mesure utilisant le système de microscopie CAM 4-D

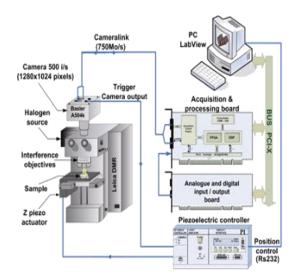


Fig. I.14: Schéma du système de microscopie 4-D

Ce prototype peut être décomposé en deux parties. Une première partie, optique, est constituée d'un microscope Leica DMRX équipé d'objectifs interférométriques (Michelson ou Mirau), d'une source de lumière, d'une caméra rapide numérique et d'un module de translation verticale piézoélectrique avec une dynamique de 100 µm. Une série de franges peut alors être observée dans le détecteur de la caméra montrant les variations de contraste au niveau de chaque pixel. Une seconde partie, électronique/informatique, est constituée d'une carte d'acquisition (dotée d'un FPGA Virtex 2P de Xilinx et de mémoires SRAM et DDR) et d'un ordinateur. Elle sert à contrôler les différents systèmes de translation et à assurer l'acquisition, le stockage et le traitement des données d'interférence issues

de la partie optique. L'ensemble des composants doit être soigneusement synchronisé afin que le système puisse fonctionner correctement.

Le dispositif est posé sur une table anti-vibration (SmartTable de NewPort) équipée d'un système de compensation actif qui limite les vibrations résiduelles du banc optique.

Le principe de fonctionnement du système CAM 4-D est le suivant : la surface de l'échantillon à analyser est balayée sur toute sa profondeur par une sonde virtuelle au moyen d'un translateur vertical piézoélectrique. Les images ainsi formées sont envoyées, via une liaison « CameraLink », vers la carte d'acquisition et sont traitées dans le FPGA, où les informations d'altitude (3-D) sont extraites. Les résultats sont ensuite envoyés vers le PC, où ils sont visualisés et analysés. Ce système a l'avantage d'une grande souplesse en terme de choix de taille d'images, de cadence d'acquisition, de profondeur de mesure et de type d'algorithme employé.

Les logiciels de contrôle du système, de visualisation, de sauvegarde et d'analyse des résultats ont été développés sous l'environnement de développement graphique LabView (Laboratory Virtual Instrumentation Engineering Workbench). La figure I.15 donne un aperçu du logiciel de visualisation des résultats en 3-D temps réel.

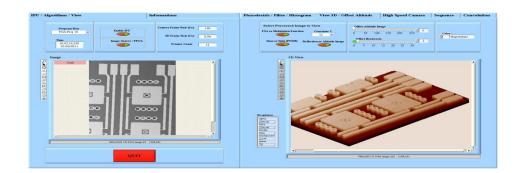


Fig.1.15: Logiciel de visualisation des résultats du système CAM 4-D

Il existe d'autres procédés exploitant une propriété particulière de la surface à usiner. Par exemple, les mesures de capacité peuvent être utilisées pour analyser les surfaces conductrices et celles par ultrasons permettent d'étudier les surfaces immergées. La figure I.16 illustre différentes micro-topographies (3D) de surfaces industrielles obtenues par la technique optique décrite précédemment.

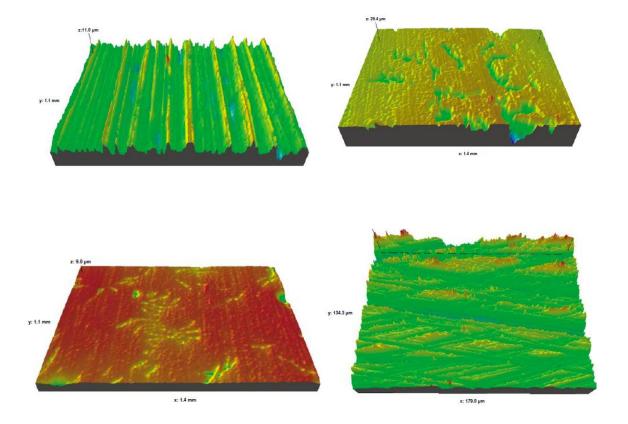


Fig. I.16 Topographies réelles de surfaces industrielles obtenues par la technique optique de mesure (3D)

I.2.6 Modélisation de la rugosité des surfaces

La hauteur d'une surface rugueuse peut être considérée comme une variable aléatoire à deux dimensions z(x,y) où z se mesure à partir du plan moyen de la surface. La densité de probabilité de cette variable par l'examen de sa courbe représentative et de celles de ses moments centrés, permet d'illustrer certains aspects de la rugosité tels que la dispersion ou l'asymetrie (moments d'ordre 3 et 4). En adoptant la notation indicielle, les principaux paramètres de la caractérisation statistique des surfaces s'expriment :

• Hauteur de la surface moyenne

$$\left\langle z_{ij}\right\rangle = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} z_{ij} \tag{I.5}$$

où N et M sont respectivement le nombre de points suivant les directions x et y et $z_{ij} = z(x_i, y_j)$

Il est à préciser que la moyenne des hauteurs de la surface est supposée nulle (surface normalisée) ; c'est à dire : $\langle z_{ij} \rangle = 0$

• Ecart type quadratique

Le calcul de l'écart-type quadratique de la distance des hauteurs de rugosité S_q permet d'évaluer l'intervalle de variation de la hauteur de rugosité. Il est préféré à l'écart arithmétique moyen S_a du fait de son usage fréquent en statistique :

$$S_{q} = \sigma = \left(\frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} z_{ij}^{2}\right)^{1/2}$$
(I.6)

Par définition, l'écart-type d'une distribution statistique est la racine carrée de son moment centré calculé à l'ordre 2 :

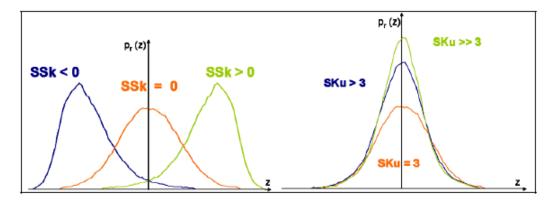
$$m_k = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left(z_{ij} - \left\langle z_{ij} \right\rangle \right)^k \tag{I.7}$$

Ces moments sont à l'origine de deux nouveaux termes décrivant la distribution statistique, le paramètre d'asymétrie SSk (Skewness) et le paramètre d'étalement SKu (Kurtosis) :

$$SSk = \frac{m_3}{S_q^3} = \frac{1}{NM} \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} z_{ij}^3}{S_q^3}$$
 (I.8)

$$SKu = \frac{m_4}{S_q^4} = \frac{1}{NM} \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} z_{ij}^4}{S_q^4}$$
 (I.9)

Dans cette nouvelle natation, la lettre initiale S indique que le paramètre considéré se rapporte à une surface rugueuse et non à un simple profil (§ I.2.4).



- a) Paramètre d'asymétrie (skewness)
- b) Paramètre d'étalement (kurtosis)

Fig. I.17 Variations de la distribution statistique des hauteurs d'une surface rugueuse pour différentes valeurs des paramètres d'asymétrie et d'étalement.

Les deux paramètres SSk et SKu sont utilisés pour définir la forme et l'agencement de la rugosité d'une surface. Toute distribution gaussienne possède un coefficient d'asymétrie nul et un coefficient d'étalement égal à 3. Une valeur nulle du paramètre SSk indique que la distribution est symétrique figure I.17a. Dans le contexte des

surfaces rugueuses, cela signifie que les vallées et les pics (sommets) sont répartis de manière égale de part et d'autre du plan moyen (par exemple, cas des surfaces de forme sinusoïdale). Une valeur négative du paramètre SSk est caractéristique d'une surface présentant plus de vallées que de pics figure I.17a. Autrement dit, une valeur positive de ce paramètre signifie que la surface présente moins de vallées que de pics.

La valeur de SKu renseigne sur l'aplatissement de la courbe de distribution des hauteurs figure I.17b. Lorsque les motifs de la rugosité (pics, vallées) sont larges et leur extrémité peu éloignée du plan moyen, alors SKu < 3 et la distribution est reserrée autour de la valeur médiane. En revanche, si les pics pointus et les vallées étroites et profondes prédominent, alors SKu > 3 et la distribution est plus large que la distribution normale. En général, les paramètres d'asymétrie et d'étalement varient simultanément.

L'étude des propriétés spectrales d'une surface rugueuse (fonction d'autocorrélation) constitue un bon complément des méthodes statistiques figure I.18.

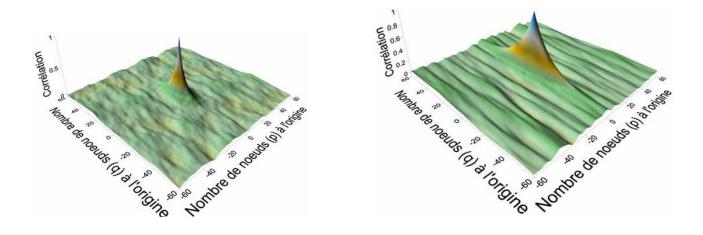
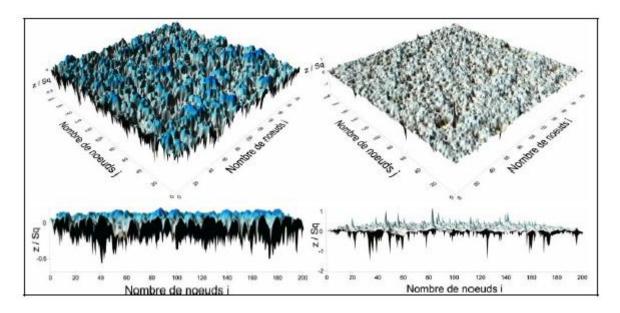


Fig. I.18 - Exemples de Fonction d'Auto-Corrélation (FAC) de surfaces rugueuses.

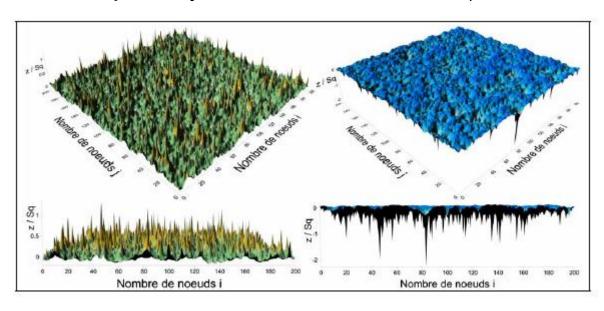
Il est intéressant de noter que les surfaces rugueuses gaussiennes ou non peuvent être générées numériquement figures I.19 en faisant généralement appel à des séries harmoniques de la forme :

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} a_{kl} \left[\cos(\omega_k x_i + \phi_k) \cos(\omega_l y_j + \phi_l) \right]$$
(I.10)

Dans cette équation, a_{kl} est un terme d'amplitude, ω_k et ω_l désignent les pulsations spatiales, ϕ_k et ϕ_l sont des déphasages introduits pour donner un caractère aléatoire aux hauteurs z.



a) Surfaces portantes à coefficient d'étalement faible / élevé



b) Surfaces à coefficient d'asymétrie positif / négatif

Fig. I. 19 Exemples de surfaces industrielles générées numériquement.

I.3 Méthodes d'analyse des contacts rugueux lubrifiés

La théorie de lubrification hydrodynamique classique fondée par Osborne Reynolds en 1886 est basée sur l'hypothèse de surfaces parfaitement lisses [1]. Cependant, il a été montré qu'une telle hypothèse est peu réaliste surtout pour l'étude des contacts lubrifiés sévèrement chargés fonctionnant avec de faibles épaisseurs de film.

Dans les systèmes mécaniques lubrifiés en régime hydrodynamique ou élasto-hydrodynamique (EHD) tels que les paliers, les butées, les garnitures mécaniques d'étanchéité, les engrenages et les roulements figure I.20, l'épaisseur du film lubrifiant h est censée d'une part être plus grande que la hauteur des aspérités et d'autre part elle doit être très faible devant la longueur d'onde de la rugosité (rugosité de Reynolds); c'est-à-dire $h << \lambda$.

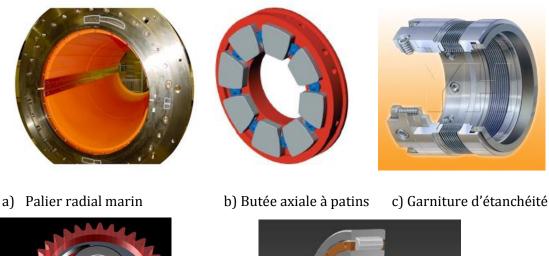
Dans ces conditions, l'équation de Reynolds peut être appliquée pour décrire le comportement hydrodynamique des contacts rugueux.

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour l'étude des effets des rugosités de surface sur les performances des contacts hydrodynamiques, à savoir les méthodes stochastiques et les méthodes déterministes. Par comparaison aux modèles stochastiques, les modèles déterministes permettent de prendre en compte de manière plus réaliste la texture et la microtopographie des surfaces dans les études de simulation.

I.3.1 Méthode stochastique

Le concept stochastique a été introduit pour la première fois par Tzeng et Saibel [7] en 1967 pour l'étude de l'influence d'une rugosité transversale sur les performances d'un patin incliné bidimensionnel.

En 1969, la théorie stochastique développée par Christensen [8] pour la lubrification hydrodynamique des surfaces rugueuses a été étendue au cas des paliers poreux par Prakash et Tiwari [9].





d) Engrenages



e) Roulement à rouleaux

Fig. I.20 Exemples de systèmes mécaniques lubrifiés.

En 1971, Christensen et Tonder [10] développent l'équation moyennée pour analyser la répartition de la pression en présence de rugosités unidirectionnelles. Dans cette équation, ils introduisent le facteur de correction provenant de la théorie stochastique pour tenir compte des effets de la rugosité dans les patins.

En 1973, Elrod [11] a utilisé une approche stochastique pour mettre en évidence les effets des paramètres statistiques sur les caractéristiques d'un écoulement newtonien en film mince en prenant en compte les défauts de rugosité.

En 1978, Patir et Cheng [12] proposent une équation de Reynolds moyennée dans laquelle plusieurs facteurs de correction de débit sont introduits pour tenir compte des effets de la rugosité dans les 3 dimensions.

En 1997, Boedo et Booker [13] utilisent la méthode des éléments finis pour l'analyse des performances d'un palier avec une rugosité isotrope et ses effets sur la déformation élastique du palier. Dans cette étude, le fluide est supposé newtonien. En 2001, Wang et Keith [14] ont utilisé l'algorithme de cavitation universel développé par Elrod [15] en 1981 puis par Vijayaraghavan et Keith [16] pour analyser les effets de la rugosité ainsi que les effets non newtoniens sur le comportement de paliers dynamiquement chargés. Trois types de rugosité ont été étudiés : longitudinale, axiale et isotrope.

Récemment, Naduvinamani *et al.* [17] ont étudié l'effet de l'obliquité (skewness) de la rugosité sur les performances hydrodynamiques d'un patin échelon de Rayleigh poreux utilisant un fluide à couple de contrainte comme lubrifiant. Ils ont montré que pour une inclinaison négative de la rugosité, la capacité de charge du contact augmente tandis que le coefficient de frottement diminue. Cependant, la tendance inverse est observée pour une inclinaison positive.

I.3.2 Méthode déterministe

Ce type d'analyse est basé sur une résolution numérique directe de l'équation de Reynolds et une description de profils de surfaces simplifiées, en prenant par exemple un profil modélisé par une fonction périodique ou des profils réels.

Il n'est plus nécessaire de connaître les paramètres statistiques relatifs au type de rugosité. Au lieu de considérer des facteurs de flux dans l'équation de Reynolds, on l'utilise sous la forme classique. C'est dans l'équation de l'épaisseur du film où sont prises en compte les rugosités.

En 1992, Kweh *et al.* [18] se sont intéressés au cas d'un contact lourdement chargé en introduisant une rugosité transverse sinusoïdale tridimensionnelle. Greenwood *et al.* [19] traitent le problème inverse; c'est-à-dire la rugosité de la surface est recherchée à partir des variations sinusoïdales de la pression.

La reproduction de la rugosité de la surface revient à regarder les variations de la pression et ne prendre en compte que les petites variations: les composantes de basses fréquences (l'ondulation) d'une rugosité de surface sont très aplaties alors que les composantes de hautes fréquences (rugosité) sont encore présentes après déformation.

En 1997, Zhu *et al.* [20] ont utilisé un relevé tridimensionnel de rugosité de surface pour étudier un contact ponctuel. Ils montrent que le pic de pression est une variable locale qui dépend largement des aspérités et de leurs pentes (obliquités).

L'approche déterministe permet de prendre en compte la variance la plus réaliste des rugosités. Les travaux effectués avec ce type d'approche sont basés sur l'application de l'équation de Reynolds et montrent qu'une description précise de la rugosité est une donnée importante. Elle permet d'obtenir des informations locales telles que les variations rapides locales de la pression. Cependant, cette approche nécessite un espace mémoire important et de grands efforts de calcul car il faut raffiner au maximum le maillage pour pouvoir décrire les plus petites ondulations de la rugosité.

Récemment, Dobrica *et al.* [21] ont étudié l'influence de la pression spécifique sur les performances d'un palier à arc partiel rugueux de faibles dimensions dont la surface projetée est de 3 cm² fonctionnant en régime de lubrification mixte. Pour prendre en considération les effets des différentes formes de rugosités (anisotropes, transversales et longitudinales), ces auteurs ont utilisé deux approches, à savoir : l'approche stochastique proposée par Patir et Cheng [12] basée sur la résolution d'une équation de Reynolds moyennée par la méthode des volumes finis et l'approche déterministe basée sur la résolution de l'équation de Reynolds classique au moyen de la même méthode, i. e. les volumes finis. Dans cette excellente étude, l'arbre tournant à une faible vitesse de rotation est supposé rigide et parfaitement lisse tandis que la surface du patin contiguë au film présente des rugosités gaussiennes isotropes ou orientées générées numériquement dont la rugosité RMS ou R_q =0.4 microns. Ils ont montré que :

- l'orientation de la rugosité de surface affecte les performances du palier tels que l'épaisseur minimale du film, l'angle de calage et les couples de frottement calculés sur l'arbre et le patin;
- par comparaison au cas lisse, l'effet de la rugosité transversale est le plus important conduisant à une augmentation importante de l'épaisseur minimale du film et du couple de frottement sur l'arbre;
- la rugosité longitudinale n'affecte que le couple de frottement.

A partir d'une comparaison des résultats obtenus par les deux approches déterministe et stochastique pour les trois formes de rugosités considérées, ils ont aussi montré que l'approche stochastique donne une bonne prédiction de l'épaisseur minimale du film et une mauvaise estimation (sous-estimation) des couples de frottement.

Plus récemment, les mêmes auteurs [22] ont développé une nouvelle approche élastohydrodynamique (EHD) pour l'étude du comportement des paliers à arc partiel rugueux fonctionnant en régime de lubrification mixte. Dans cette approche, l'arbre est supposé rigide et lisse tournant à de faibles vitesses tandis que le patin est rugueux et compliant dont le comportement est élastique parfaitement plastique (EPP).

I.3.3 Méthode d'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation ou de moyennisation est une théorie mathématique qui inclut l'étude des équations aux dérivées partielles à coefficients à oscillation rapide [23]. Depuis quelques décennies, cette méthode a été utilisée avec succès pour le traitement des problèmes ayant trait, par exemple, à l'élasticité des

milieux anisotropes tels que les matériaux composites [24, 25]. En revanche, cette méthode n'est pas fréquemment utilisée dans le domaine de la tribologie. Récemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'application du concept d'homogénéisation dans les études de simulation des problèmes de lubrification par fluides compressibles et incompressibles dont le comportement peut être newtonien ou non newtonien.

L'approche d'homogénéisation consiste à réécrire le problème posé en deux autres :

- Un problème local gouverné par 3 équations aux dérivées partielles du second ordre dont les inconnues sont les fonctions périodiques locales.
- Un problème homogénéisé régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée supposée nulle sur la frontière du domaine global.

La difficulté majeure de cette technique réside dans le découplage des deux problèmes à partir du problème global. Les coefficients du problème homogénéisé dépendent de la solution locale et ne peuvent être calculés qu'après traitement du problème local.

I.4 Composition chimique et comportement rhéologique des huiles lubrifiantes

Les lubrifiants naturels d'origine végétale et animale sont utilisés depuis la plus haute antiquité (mésopotamie, égypte ancienne, ...), et de nos jours, malgré leurs inconvénients, ils entrent encore dans la composition de certaines préparations de lubrifiants en tant qu'additifs. En effet, ce sont d'excellents agents d'onctuosité et de bons lubrifiants limites, c'est-à-dire lorsque les contacts inévitables entre les surfaces frottantes ne sont pas trop importants.

Les lubrifiants d'origine pétrolière ou minérale sont aujourd'hui de loin les plus utilisés à cause de leurs bonnes caractéristiques chimiques (stabilité thermique, résistance à l'oxydation) et de leurs prix qui sont beaucoup plus faible que ceux des lubrifiants naturels.

Le progrès de la chimie a fait apparaître une autre catégorie de lubrifiants dénommés les huiles synthétiques qui sont employées dans les situations où les bases minérales ne présentent pas de performances suffisantes à cause de leurs limitations intrinsèques.

Dans la plupart des applications modernes, des produits chimiques de synthèse, appelés additifs (ou adjuvants ou dopes), sont donc mélangés à l'huile de base pour en augmenter les performances et répondre à une demande d'efficacité accrue. Un lubrifiant complètement formulé comprend une base lubrifiante, un ensemble d'additifs et, dans le cas d'une huile multigrade, un améliorant d'indice de viscosité (VI). Le total de ces additifs peut représenter jusqu'à 30% de la composition du produit (par exemple, les graisses).

Les huiles lubrifiantes sont donc composées d'un constituant principal appelé " base de lubrifiant", qui peut être soit d'origine : naturelle (végétale, animale), minérale (issue de la distillation et du raffinage du pétrole brut), ou d'origine synthétique (transformation de composants organiques provenant du pétrole) à laquelle des additifs sont ajoutés pour en ajuster les propriétés.

I.4.1. Huiles de base

a) Les huiles d'origine végétale

L'utilisation d'huiles végétales, notamment d'huile de Colza, connaît actuellement un accroissement d'intérêt pour la préparation de certains lubrifiants biodégradables destinés soit à des applications de graissage à l'huile perdue (lubrifiants de chaînes de tronçonneuses à bois, lubrifiants de chaînes de véhicules à deux roues, etc.), soit la lubrification de matériels hydrauliques travaillant en extérieur mais peu sollicités thermiquement, lorsqu'il y a risque de pollution du milieu naturel par des fuites de fluides, ce qui est le cas des matériels hydrauliques agricoles et forestiers et de certains matériels de travaux publics.

Il est à noter que pour des applications à température élevée les lubrifiants biodégradables, encore rares, sont formulés avec des esters synthétiques. En effet, la trop faible stabilité à l'oxydation des huiles végétales les rend, pour l'instant, impropres à la lubrification de ces mécanismes avec les additifs conventionnels. Cependant, des huiles moteurs de grades 5W40 et 10W40 à base d'huile de tournesol à haute teneur en acide oléique viennent d'être mises sur le marché.

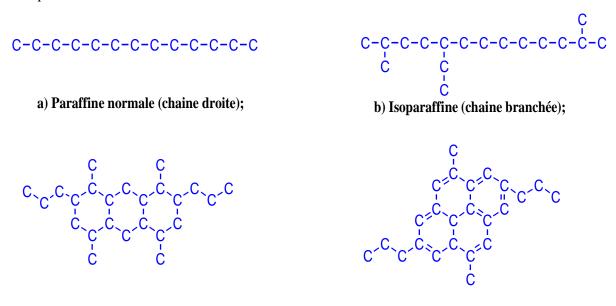


Fig. I-21: Structures des huiles de base.

b) Les huiles minérales

c) Naphtène (cycloparaffine);

Les bases minérales sont issues d'une série de procédés de séparation et de raffinage de la fraction du pétrole brut dont la température d'ébullition est supérieure à 340°C. Elles sont constituées de molécules hydrocarbonées contenant vingt à soixante-dix, voire plus, d'atomes de carbones.

d) Aromatique (cycloparaffine avec liaison double).

Elles peuvent être caractérisées comme de type paraffinique, naphténique ou aromatique.

1) Bases à structures aromatiques

Ce sont des bases à structure benzénique qui se caractérisent par une faible résistance à l'oxydation, leur tendance à former des boues noires aux températures de fonctionnement élevées, leur faible indice de viscosité et leur nature cancérigène.

2) Bases à structures paraffiniques

Elles sont distinguées par une structure moléculaire composée de longues chaînes hydrocarbonées, les atomes d'hydrogène et de carbone sont liés d'une longue série linéaire semblable à une chaîne. Ces bases présentent une grande stabilité à l'oxydation et possèdent un VI élevé (de l'ordre de 100). Cependant le haut poids moléculaire de certaines chaînes peut entraîner la cristallisation de l'huile dès la température ambiante. Les isoparaffiniques (figure I-21b) qui possèdent un VI moins élevé ne présentent pas cet inconvénient.

3) bases à structures naphténiques

Les huiles naphténiques (figure I-21c) sont distinguées par une structure moléculaire composée de chaînes cycliques (d'anneaux) d'hydrocarbures, les atomes d'hydrogène et de carbone sont liés dans un modèle circulaire. Ces bases sont moins stables à l'oxydation, et présentent un VI inférieur (de l'ordre de 50).

Les bases paraffiniques sont généralement préférées, à cause de leur VI élevé. Cependant, suivant la qualité du branchement, elles peuvent contenir une quantité non négligeable de paraffine, leur point d'écoulement est alors élevé. Les bases naphténiques, qui possèdent un VI moins élevé, sont uniquement préférées dans certaines applications, à cause de leur teneur moins grande en paraffine et de leur point d'écoulement plus bas. En réalité, aucune base n'est composée d'un seul type de structure. Toutes les bases contiennent un mélange dans lequel un des trois types de structure prédomine.

c) Les huiles synthétiques

De nombreux produits synthétiques ont été développés ces dernières décennies pour résoudre des problèmes de lubrification particulièrement difficiles. On peut citer comme exemple les fluides de haute stabilité thermique, les fluides ininflammables et les lubrifiants pour l'aviation. Parmi les principales familles de produits utilisés, on mentionnera :

- les esters aliphatiques qui se caractérisent par un indice de viscosité élevé, une faible volatilité et des propriétés lubrifiantes excellentes ;
- les esters phosphoriques utilisés souvent comme additifs anti-usure, qui présentent un indice de viscosité élevé et sont ininflammables;
- les silicones et silicates qui ont un excellent indice de viscosité et un point d'écoulement très bas ; cependant leurs propriétés lubrifiantes ne sont pas très bonnes;
- les polyphényléthers qui présentent une remarquable stabilité à haute température (jusqu'à 450°C environ) et qui sont d'excellents lubrifiants. Ils ont cependant un indice de viscosité faible et sont très onéreux;
- les polypropylènes glycols qui se caractérisent par un indice de viscosité élevé un point d'écoulement très bas et de bonnes propriétés anti-usure, cependant ils ont une stabilité thermique et une résistance à l'oxydation assez moyenne et ne sont pas miscibles aux bases minérales ;
- les polyoléfines qui présentent un indice de viscosité assez élevé et un point d'écoulement très bas.

Tous ces produits sont utilisés soit pur soit en mélange avec d'autres bases synthétiques ou minérales.

Il est utile souligner que les huiles synthétiques ont des propriétés qui sont généralement supérieures à celles des huiles minérales, elles sont réservées aux applications extrêmes à basse ou à haute température. Sinon, une huile minérale qui est moins coûteuse et tout à fait acceptable.

I.4.2 Les additifs ou dopes

Dans la plupart des applications modernes, le pouvoir lubrifiant intrinsèque d'une huile minérale n'est pas suffisant. C'est pour obtenir les niveaux de performance les plus élevés et répondre à une demande d'efficacité accrue qu'intervient la formulation utilisant les additifs. Ce sont des produits chimiques de synthèse mélangés à l'huile de base, le total de ces additifs peut représenter jusqu'à 30% de la composition du produit. On peut classer les additifs en trois grandes catégories :

- ceux qui améliorent la stabilité chimique de l'huile ou inhibent les effets des produits de dégradation;
- ceux qui améliorent les propriétés physiques et rhéologiques;
- ceux qui protègent les surfaces métalliques et ont un effet anti-usure.

I.4.2.1 Additifs améliorant la stabilité chimique de l'huile ou inhibant les effets des produits de dégradation

Les additifs anti-oxydants: L'oxydation de l'huile provoque la formation de deux types de produits : les acides organiques de faibles poids moléculaires très corrosifs pour les métaux et des composés oxygénés de masses molaires comprises entre 500 et 3000 g/mole qui, dans une première étape, augmentent la viscosité avant de polymériser, précipiter dans l'huile et enfin former des dépôts sur les parois.

Le mécanisme d'oxydation des hydrocarbures par l'air est de nature radicalaire et les additifs agissent soit en désactivant les métaux catalyseurs par complexation d'un degré d'oxydation, soit en décomposant les peroxydes formés par action de l'oxygène sur les radicaux hydrocarbonés, soit en transformant les radicaux de la chaîne d'oxydation en radicaux stables. On utilise les phénols, des arylamines substituées ou des composés soufrés qui forment des radicaux stables; les dialkyl-dithiophosphates de zinc sont très largement utilisés car ils ont un effet anti-usure en plus de l'effet antioxydant.

Les additifs détergents et dispersants: Ces additifs sont destinés à limiter les effets produits par l'oxydation que les anti-oxydants ne peuvent totalement empêcher.

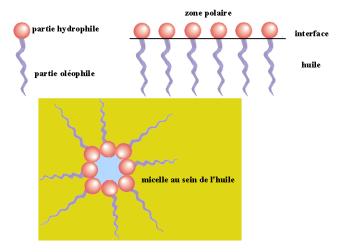


Fig. I-22: Organisation des additifs dispersants et détergents dans l'huile

Les additifs dispersants et détergents possèdent une structure tensioactive constituée d'une partie organique soluble dans l'huile et d'une partie polaire. Ce caractère est responsable de deux comportements : l'adsorption sur les surfaces polaires et l'auto-association dans l'huile pour former les micelles (figure I-22).

- les **dispersants** sont des tensioactifs organiques.
- les **détergents** sont des sels d'acides organiques ou de phénols et de métaux divalents (calcium et magnésium).

I.4.2.2. Les additifs améliorant les propriétés rhéologiques des lubrifiants

le point d'écoulement des huiles et les additifs anti-congélants

Le refroidissement d'un lubrifiant provoque la cristallisation des paraffines vers -10°C (c'est le point de trouble), mais l'huile s'écoule car les cristaux sont dispersés. Si la température continue à s'abaisser, on observe la croissance de ces cristaux et la formation d'une phase continue (réseau) qui emprisonne les autres constituants de l'huile, ce qui gène l'écoulement. La température en dessous de laquelle le lubrifiant ne s'écoule plus est définie comme<<point d'écoulement>>.

Les produits dits <<anticongelants >> commercialisés sont des alkylnaphtènes, des polyacrylates d'alcools à longues chaînes ou des polystyrènes alkylés.

Les additifs améliorant le VI

Les bases lubrifiantes d'origine pétrolière ont un VI qui ne dépasse pas 100. Or, il est important que la viscosité de l'huile diminue le moins possible pendant le fonctionnement à chaud pour éviter la rupture du film d'huile. Les propriétés des polymères en solution permettent de résoudre ce problème.

La viscosité d'une solution de polymère dépend de la concentration et du volume qu'occupe chaque macromolécule dans le solvant. Ce volume dépend lui même de l'importance des interactions entre le solvant et le polymère. L'huile de base (naphténique, paraffinique et faiblement aromatique) est un assez mauvais solvant des polymères et les forces de cohésion des motifs des polymères entre eux seront plus fortes que les interactions entre l'huile et le polymère. La chaîne polymère peu gonflée occupera un faible volume dans l'huile et l'augmentation de la viscosité sera faible. Pendant le fonctionnement la température s'élève, le pouvoir solvant de l'huile augmente. Ces interactions avec le polymère se traduisent par une augmentation du volume de la macromolécule, donc de sa contribution à la viscosité de la solution, qui compense la perte de viscosité que l'augmentation de la température fait subir à l'huile.

Les additifs qui sont très largement utilisés actuellement sont :

- les polymères hydrocarbonés,
- les polymères à fonction ester qui sont des polyméthacrylates de masses molaires comprises entre 150 000 et 500 000 g/mole, obtenus par polymérisation de méthacrylates d'alcools de C_8 à C_{14} par voie radicalaire.

Les produits anti-moussants

La présence d'agents tensioactifs dans les formules et la forte agitation en présence de gaz provoque la formation de mousse. L'ajout de quelques parties par million (PPM) de dérivés de silicones permet d'éviter ce phénomène.

I.4.2.3. Les additifs extrême pression (EP) et anti-usure

Lorsque le lubrifiant fonctionne en régime hydrodynamique, le film d'huile est stable et il n'y a pas réellement de problème d'usure. En conditions plus sévères, si les pièces se rapprochent, si le film se rompt, le frottement peut provoquer de l'arrachement de métal. En conditions extrêmes, l'échauffement peut conduire à la soudure des pièces (grippage).

Les additifs extrême pression (EP) et anti-usure ont pour rôle de créer un lubrifiant solide par réaction avec la surface. Les produits commerciaux sont des composés organiques contenant du chlore, du soufre ou du phosphore. Ces atomes réagissent avec le métal au moment de la décomposition thermique de l'additif en créant une interface plus ductile qui joue le rôle de lubrifiant solide. On utilise par exemple des produits de réaction du soufre avec des oléfines, des dérivés dithiophosphoriques ou des phosphomolybdates.

I.5. Viscosité des lubrifiants

De toutes les propriétés physiques et chimiques à considérer en lubrification, la viscosité est l'une des plus importante. Dans les paliers, les engrenages et les systèmes hydrauliques où le régime de fonctionnement est hydrodynamique, c'est la viscosité qui détermine les pertes en frottement, le rendement mécanique, la capacité de charge et l'épaisseur du film d'huile.

La viscosité est véritablement une mesure de l'aptitude physique d'un fluide à assurer la lubrification par film complet sous des conditions définies de vitesse, de charge et de température.

I.5.1. Définition de la viscosité

Selon la norme N.F. T 60-100 de novembre 1959 : " la viscosité d'un liquide est la propriété de ce liquide, résultant de la résistance qu'opposent ses molécules à une force tendant à les déplacer par glissement dans son sein ". Ainsi la viscosité d'un fluide est la résistance opposée par ce fluide à sa mise en mouvement.

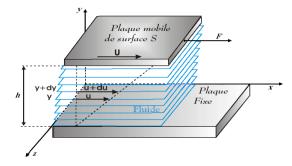


Fig. I-23: Écoulement laminaire entre deux plans parallèles (Écoulement de Couette).

La résistance peut être calculée par la formule de Newton relative à l'écoulement laminaire d'un fluide entre une surface mobile animée d'une vitesse U et une surface fixe (figure I-23). Pour visualiser le cisaillement qui s'effectue dans un film fluide, il faut imaginer que le film se compose de plusieurs couches (pellicules) semblables à une plate-forme de cartes.

La couche liquide en contact avec la plaque mobile s'accroche à sa surface et toutes les deux se déplacent à la même vitesse U. De même, la couche liquide en contact avec la deuxième surface fixe est stationnaire. Entre ces deux surfaces les différentes couches dans l'intervalle se déplacent à des vitesses directement proportionnelles à leur distance de la surface fixe. Par exemple, à une distance y de la surface fixe la vitesse de la couche de fluide est u, et devient u+du à la distance y+dy. Alors la contrainte tangentielle T_{xy} , appelée fréquemment contrainte de cisaillement et notée τ , est donnée par : $\tau = T_{xy} = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)$ (I.1)

Où μ est un coefficient caractéristique du fluide appelé coefficient de viscosité dynamique et (du/dy) est le taux de cisaillement ou le gradient de vitesse ou le taux de déformation, dont la dimension est T^{-1} .

Plus le fluide est visqueux, plus il s'oppose à sa mise en mouvement. En étudiant le rapport entre F/S (homogène à la contrainte) et U/h (homogène au gradient de la vitesse), nous mettons en évidence plusieurs types de comportement rhéologique.

L6 Comportements rhéologiques des huiles lubrifiantes

Si le modèle de fluide newtonien décrit bien la très grande majorité des fluides composés de molécules simples, il existe un bon nombre de fluides dont certains sont utilisés en lubrification (huiles lourdes, graisses, etc.) qui ont un comportement plus complexe.

La définition d'un fluide newtonien est assez restrictive, les contraintes de cisaillement sont proportionnelles aux gradients de vitesse, ce qui implique :

- dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement;
- la viscosité est indépendante du taux de cisaillement ;
- ♦ la viscosité est indépendante du temps et les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est arrêté.

Toute déviation de ces règles est le signe d'un comportement non newtonien. La description de ces comportements et leurs interprétations en relation avec la structure microscopique du fluide constitue la discipline appelée rhéologie.

Le terme **rhéologie** fut inventé par Eugène Bingham en 1928. La rhéologie a pour objet l'étude de la déformation des corps, y compris leurs écoulements, sous l'influence de contraintes qui leurs sont appliquées.

L'utilisation des fluides (huiles, etc.) en lubrification, nécessite des études sur leurs lois de comportement rhéologique dans des conditions réelles de fonctionnement de plus en plus sévères.

I.6.1 Equations constitutives

Le terme de loi de comportement des fluides est couramment utilisé pour énoncer la relation descriptive du tenseur des contraintes en liaison avec celui des taux de déformation représenté dans le milieu du fluide en écoulement. Les caractères des fluides newtoniens et non newtoniens sont alors associés à des paramètres dont dépendent ces relations.

Par cette démarche, plusieurs lois de comportement ont pu être proposées, donnant une meilleure simulation de l'écoulement des fluides de différents types.

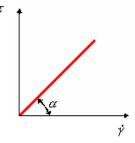
I.6.2. Fluide newtonien

Pour un fluide newtonien et compressible, la relation qui lie le tenseur des contraintes T_{ij} au tenseur des taux de déformation D_{ij} est de la forme : $T_{ij} = (-p + \lambda\theta)\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$ (I.2)

où p est la pression dans le fluide, θ le taux de dilatation cubique, δ_{ij} le symbole de Kronecker, μ et λ deux coefficients de viscosité appelés constantes de Navier.

Pour un fluide incompressible (iso-volume) $\theta = 0$, le second coefficient de viscosité λ n'intervient plus.

Fig. I-24. Rhéogramme d'un fluide newtonien $(\mu = tg \alpha)$



Ce fluide, composé d'une seule phase liquide, est aussi appelé fluide visqueux linéaire. Il est de plus incompressible, homogène et isotrope. La relation (I-2) généralise l'équation (I-1) dans le cas tridimensionnel où τ est la contrainte de cisaillement visqueuse et $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement. La majorité des fluides utilisés en lubrification suivent, en première approximation, cette loi de comportement qui est représentée graphiquement en figure I.24. Par rapport aux lois de comportement des fluides visqueux non linéaires, elle permet de simplifier considérablement les études théoriques sur les caractéristiques des mécanismes lubrifiés.

I.6.3. Fluides non newtoniens

Dans ce cas la viscosité n'est pas constante. A chaque valeur du couple taux de cisaillement- contrainte de cisaillement ($\dot{\gamma}$, τ) correspond une valeur de la viscosité μ . Dès lors, on parle de viscosité apparente.

Les lois de comportement des fluides non newtoniens sont caractérisées par la composition du milieu (fluides multiphases et fluides composés de différentes substances liquides ou solides). Chacune des phases (substances) fait intervenir différents caractères liés à son état de mouvement tels que viscosité, élasticité,

plasticité, ainsi que l'influence de la température, l'effet régressif, etc. La prise en compte de l'ensemble de ces facteurs conduit alors aux lois de comportement non linéaires des fluides non newtoniens.

I.6.3.1. Fluide polaire (couple-stress fluid ou polar fluid)

La quasi-totalité des huiles utilisées pour la lubrification des machines contiennent des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI). Ces additifs entraînent une modification du comportement rhéologique de ces huiles. D'après la théorie de V. K. Stokes, la loi de comportement rhéologique de ce type de fluide dit à rhéologie complexe ou encore fluide polaire s'écrit: $T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{2}e_{ijk}M_{rk,r}$ (I.3)

avec:
$$M_{rk} = \frac{1}{3} M_{nn} \delta_{rk} + 4 \eta w_{k,r} + 4 \eta' w_{r,k}$$
 (I.4)

où T_{ij} est le tenseur des contraintes non symétrique ($T_{ij} \neq T_{ji}$), M_{rk} est le tenseur des couples de contraintes, e_{ijk} est le tenseur de permutation d'ordre trois, μ est le coefficient de viscosité, η et η' sont des constantes physiques dues à la présence des couples de contraintes, dont la dimension est MLT^{-1} .

I.6.3.2 Fluides visqueux non linéaires

Le caractère non newtonien le plus répandu est la variation de la viscosité avec le taux de cisaillement. De nombreux travaux expérimentaux, dont les plus anciens remontent à 1925, ont montré que même pour les fluides monophasiques, par exemple l'huile lourde ou l'huile contenant des additifs, le comportement rhéologique n'était pas linéaire. Plusieurs lois de comportement ont été proposées en lubrification à la suite de différentes expériences:

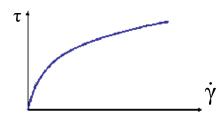
- loi d'Oswald en 1925 (loi en puissance) :
$$\tau = \mu \dot{\gamma}^n$$
 (I.5)

L'exposant n est très significatif du comportement de ce modèle. L'écoulement devient visqueux linéaire ou newtonien pour une valeur de n égale à un. Toute valeur de n autre que un signifie un comportement visqueux non linéaire ou non newtonien. Le fluide est dit rhéofluidifiant pour des valeurs de n inférieures à un et rhéoépaississant pour des valeurs de n supérieures à un.

- Fluide pseudo-plastique ou rhéofluidifiant

Ces systèmes ne présentent pas de seuil d'écoulement, la déformation commence dès qu'une contrainte est exercée. La tension de cisaillement τ n'est pas proportionnelle au taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ car la viscosité diminue pour des taux de cisaillement croissants (fig. I-25).

Fig. I.25. Rhéogramme d'un fluide rhéofluidifiant.



Ce type de comportement est moins fréquent. Il concerne les dispersions de particules asymétriques, les polymères à longues chaînes en solution ou à l'état fondu, les pâtes à papier, les colles, les ciments, etc.

Les molécules, sous l'effet du taux de cisaillement ont tendance à s'aligner progressivement le long des couches ce qui favorise leur glissement relatif. Une seconde interprétation consiste à envisager une modification de la structure du matériau sous l'effet du gradient de vitesse (destruction par rupture de liaison de type Van der Waals).

- Fluide dilatant ou rhéoépaississant

Un écoulement dilatant se manifeste lorsqu'une augmentation de la tension de cisaillement entraîne une augmentation de la viscosité (fig. I-26)

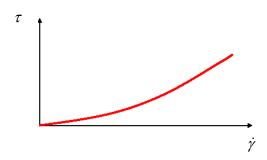


Fig. I-26: Rhéogramme d'un fluide rhéoépaississant.

Ce comportement est beaucoup moins fréquent. Il concerne des dispersions très concentrées, les solutions d'amidon, sable mouillés et compactés et certaines huiles polymériques. Certains de ces produits augmentent de volume sous la contrainte. Les causes d'origine moléculaire sont diverses et pas toujours élucidées. On peut invoquer l'augmentation du volume libre entre les particules. Au repos, il est minimal, sous un gradient de vitesse en augmentation, il y a gonflement du liquide (les particules sont moins imbriquées). La phase continue n'est plus capable de combler les vides inter-particulaires ni d'assurer une bonne lubrification.

Fluide viscoélastique

Un autre comportement non newtonien très important est le caractère viscoélastique, la réponse du fluide à une déformation présente à la fois un aspect visqueux (contrainte proportionnelle au taux de déformation) et un aspect élastique (contrainte proportionnelle à la déformation).

Le modèle le plus simple de fluide viscoélastique consiste à additionner les contraintes d'origine visqueuse et d'origine élastique. La représentation graphique la plus simple de ce modèle est celle de Maxwell : association en série d'un ressort et d'un amortisseur (fig. I-27).

Fig. I.27 Modèle de Maxwell

Selon Maxwell, tous les corps sont viscoélastiques. Un liquide réagit comme un solide quand l'impulsion qu'on lui applique est extrêmement brève. Sous l'effet d'une contrainte, le fluage et l'écoulement n'apparaissent qu'au bout d'un certain temps. Celui-ci correspond au temps de relaxation qui sépare en gros le temps de passage du phénomène élastique au phénomène visqueux.

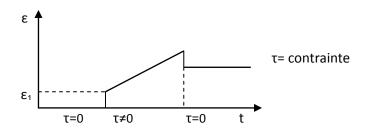


Fig. I-28: Réponse d'un fluide à une contrainte de cisaillement.

La figure I-28 montre comment un fluide répond à l'application d'une contrainte de cisaillement. Il se produit immédiatement une déformation élastique suivie du fluage. La déformation élastique se fait durant un temps très court et est récupérée lorsque cesse la contrainte. Le modèle de Maxwell est représenté par une relation

linéaire:
$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta}$$
 (I.6)

Suivant cette équation, en écoulement permanent, le fluide viscoélastique se comporte comme un fluide newtonien de viscosité μ . Mais, dans les mouvements transitoires brefs il se comporte comme un fluide élastique de module de cisaillement G.

Par des expériences avec des contacts très chargés et à faible glissement relatif des surfaces, plusieurs auteurs ont montré que la viscosité apparente de quelques produits lubrifiants est une fonction de la vitesse d'entraînement. Ce phénomène sous-entend un comportement qui dépend d'un facteur de temps de passage du lubrifiant dans la zone de contact.

- Fluide viscoplastique ou fluide de Bingham

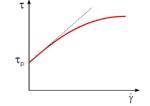
Au repos le fluide possède une structure tridimensionnelle rigide (particules emboîtées) ou floculées. Le seuil d'écoulement correspond à l'énergie nécessaire pour les séparer. Au-delà, l'écoulement s'effectue sous l'effet de la contrainte effective ($\tau - \tau_0$).

Lorsque la tension de cisaillement est inférieure au seuil d'écoulement, le système se comporte comme un solide : $\tau = G\dot{\gamma}$

Au-delà, le matériau a le comportement d'un fluide newtonien (figure I-29), avec : $\tau = \tau_0 + \alpha \dot{\gamma}$

où α est la viscosité plastique

Fig. I-29: Rhéogramme d'un fluide plastique de Bingham.



Bien que la loi de comportement dite de Bingham, soit établie théoriquement, de nombreuses expériences ont montré qu'elle est applicable pour une gamme très large de produits lubrifiants tels que les graisses.

I.7. Conclusions

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons présenté les états structuraux et géométriques des surfaces industrielles ainsi que les paramètres statistiques couramment employés pour caractériser la rugosité de ces surfaces tout en évoquant quelques techniques de mesure topographique (3-D) permettant de les obtenir. L'évaluation de la texture et de la topographie (3-D) des surfaces mécaniques, qui est un domaine en expansion, est primordiale pour déterminer leurs propriétés tribologiques. Par exemple, la quantification de l'usure en terme de changement de la morphologie de la surface peut offrir une image plus détaillée du processus d'usure.

D'après la recherche bibliographique, effectuée dans la deuxième partie, sur les différentes méthodes d'analyse des contacts lubrifiés rugueux, il ressort que la méthode d'homogénéisation s'avère être une alternative intéressante à la méthode déterministe spécifiquement dans le cas de rugosités périodiques car elle ne nécessite qu'une allocation mémoire réduite. De plus, elle présente des résultats plus réalistes comparés à ceux issus des approches stochastiques. Par comparaison à la méthode déterministe décrite précédemment, la technique d'homogénéisation ne nécessite pas un maillage très fin pour prendre en compte l'effet de la rugosité car cette dernière est prise en compte pendant la résolution des problèmes locaux. Cependant, cette technique ne permet pas d'utiliser comme données les topographies de surfaces réelles mesurées suivant les 3 directions de l'espace telles que celles illustrées par la figure I.16.

Il ressort de la troisième partie de l'étude bibliographique que les huiles lubrifiantes sont généralement constituées d'un fluide de base appelé « base de lubrifiant » qui peut être synthétique ou d'origine minérale, auquel sont ajoutés de nombreux additifs dont la nature varie avec la destination du produit et que les fluides peuvent être classés en deux grandes catégories:

- fluides newtoniens pour lesquels le taux de cisaillement est directement proportionnel à la contrainte (pour ce type de fluide, la viscosité dynamique μ est constante);
- fluides non newtoniens pour lesquels la relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement est non linéaire. La viscosité diminue ou augmente lorsque le taux de cisaillement auquel sont soumis ces fluides augmente.

Cette étude a permis de mettre en évidence la diversité et le degré de complexité du comportement rhéologique des fluides non newtoniens. Ceci est confirmé par les nombreux modèles proposés dans la littérature dont certains ont été rappelés dans ce chapitre. Ces modèles dépendent éventuellement de la composition chimique du fluide et des conditions de fonctionnement (taux de cisaillement ou gradients de vitesse élevés) du système lubrifié par ce fluide.

Le calcul correct des performances d'un contact lubrifié nécessite donc le choix d'un modèle qui décrit convenablement le comportement d'une huile lubrifiante surtout lorsque celle-ci contient des additifs.

En ce qui concerne notre étude, on a choisi le modèle du fluide polaire avec prise en considération des couples de contraintes en plus des forces de surfaces. Ce modèle, dans lequel on néglige les forces et les couples de volume, permet de décrire convenablement le comportement rhéologique des huiles contenant des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI) qui sont des polymères solubles.

CHAPITRE II

Théorie de la lubrification hydrodynamique par fluide newtonien en régime d'écoulement laminaire

II .1 Introduction

La lubrification est une science qui s'intéresse à l'étude des phénomènes d'interaction entre deux corps en contact entre lesquels est intercalé un troisième corps appelé lubrifiant qui peut être fluide, solide ou semisolide. Selon la nature du lubrifiant utilisé, on distingue deux types de lubrification, à savoir : la lubrification solide et la lubrification fluide. Dans cette dernière, les régimes de lubrification qui peuvent être rencontrés dans le cas des contacts fonctionnant à basse pression sont illustrés sur la figure II.1. Le fluide peut être un liquide pratiquement incompressible ou iso-volume tels que de l'huile, de l'eau ou, même un métal fondu (Sodium liquide à 400 °C) comme il peut être un gaz compressible le plus souvent de l'air : c'est le cas des paliers et butées à gaz.

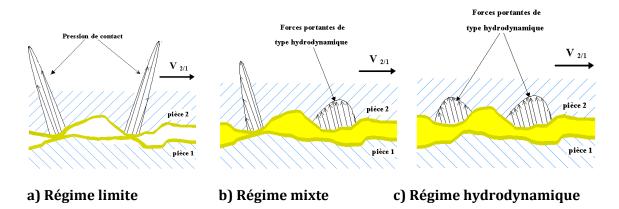


Fig. II.1 Différents régimes de lubrification fluide à basse pression.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'étude des contacts hydrodynamiques en supposant que les surfaces antagonistes sont séparées par un film fluide très mince, continu dont le comportement est newtonien figure II.2. Ces hypothèses permettent d'utiliser les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus pour décrire l'écoulement du fluide lubrifiant dans les contacts.

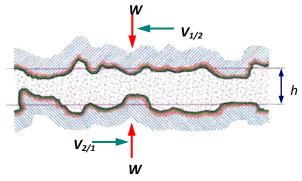


Fig. II.2 Schéma d'un contact lubrifié.

II.2 Equations générales de la dynamique des fluides visqueux

Les équations générales de la dynamique des fluides visqueux (réels) sont établies à partir des lois de conservation de la mécanique et de la loi de comportement rhéologique du fluide considéré. Dans le cas d'un fluide newtonien et compressible, les équations générales sont les suivantes :

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 i = 1, 2, 3 (II.1)$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \gamma_i = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} \qquad i, j = 1, 2, 3$$
(II.2)

avec
$$\gamma_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$
 et $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$

- Loi de comportement rhéologique :

$$\sigma_{ii} = -p\delta_{ii} + \tau_{ii} \tag{II.3}$$

où
$$au_{ij} = \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); k = 1, 2, 3$$
 (II.4)

- Equation de conservation de l'énergie :

L'application du premier principe de la thermodynamique permet la dérivation de l'équation d'énergie suivante :

$$\rho C_{p} \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_{i}} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_{i}} \right) - p \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{i}} + \Phi$$
(II.5)

où
$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau_{ij} \left(D_{ij} + \Omega_{ij} \right)$$
 $i, j = 1, 2, 3$ (II.6)

et
$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

En reportant l'équation (II.3) dans l'équation (II.2) et en négligeant les forces massiques extérieures f_i , nous obtenons les équations de Navier :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j}$$
(II.7)

avec i, j = 1, 2, 3

Pour un fluide iso-volume ou incompressible caractérisé par une masse volumique constante $\rho = \rho_0 =$ constante, les équations (II.1), (II.4), (II.5) et (II.7) deviennent :

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 i=1, 2, 3 (II.8)$$

- Equation constitutive du fluide :

$$\sigma_{ii} = -p\delta_{ii} + 2\mu D_{ii}$$
 i, j = 1, 2, 3 (II.9)

- Equation d'énergie :

$$\rho Cp \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \Phi \tag{II.10}$$

où

$$\Phi = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$
(II.11)

- Equations de Navier :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j}$$
(II.12)

Les différents paramètres intervenant dans les équations (II.1) à (II.12) sont définis comme suit :

 x_i , t Variables d'espace et de temps,

 u_i Composantes de la vitesse d'une particule de fluide,

 γ_i Composantes de l'accélération d'une particule de fluide,

 f_i Forces massiques extérieures (gravité,...),

 σ_{ii} Tenseur des contraintes en un point du fluide,

 au_{ii} Tenseur des contraintes de cisaillement visqueuses,

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$
 Tenseur des taux de déformation symétrique,

 δ_{ii}

Tenseur unité ou symbole de Kronecker,

$$\delta_{ij} = 0$$
 si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$

$$L_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = D_{ij} + \Omega_{ij}$$

Tenseur gradient de vitesse,

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Tenseur tourbillon antisymétrique,

 C_{p}

Chaleur massique ou capacité calorifique à pression constante,

K

Conductivité thermique du fluide,

 ρ

Masse volumique du fluide,

p

Pression dans le fluide,

T

Température du fluide,

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Fonction de dissipation visqueuse ou densité de puissance,

λ

Coefficient de viscosité de dilatation du fluide,

μ

Coefficient de viscosité de cisaillement ou viscosité dynamique du fluide.

II.3 Analyse dimensionnelle

En mécanique des films minces visqueux, les équations de Navier (II.7) ou (II.12) et l'expression de la fonction de dissipation (II.6) ou (II.11) se simplifient très sensiblement car l'épaisseur du film suivant ox_3 est très faible par rapport aux deux autres dimensions de contact.

Pour mettre en évidence les termes prépondérants, il est commode de réécrire les équations relatives au fluide incompressible sous forme adimensionnée. Le changement de variables adopté est le suivant :

-Variables d'espace et de temps :

$$\widetilde{x}_1 = \frac{x_1}{L}$$
, $\widetilde{x}_2 = \frac{x_2}{L}$, $\widetilde{x}_3 = \frac{x_3}{h}$, $\widetilde{t} = t\frac{V}{L}$ (II.13)

-Composantes de la vitesse de l'écoulement :

$$\tilde{u}_1 = \frac{u_1}{V}, \ \tilde{u}_2 = \frac{u_2}{V}, \ \tilde{u}_3 = u_3 \frac{L}{Vh},$$
 (II.14)

-Composantes physiques du fluide : $\widetilde{\rho}=\frac{\rho}{\rho_0}$, $\widetilde{\mu}=\frac{\mu}{\mu_0}$

Ce changement nous conduit à poser :

$$\tilde{p} = p \frac{h^2}{\mu_0 V L} \tag{II.15}$$

Où : V est la vitesse d'une des parois du contact, L est la dimension caractéristique du contact, μ_0 et ρ_0 sont respectivement la viscosité dynamique et la masse volumique de référence à $T=T_0$.

Compte tenu de ces changements de variables, les équations (II.11) et (II.12) écrites dans le cas d'un fluide isovolume deviennent :

- Fonction de dissipation :

$$\begin{split} \widetilde{\Phi} &= \frac{\Phi}{\frac{\mu_0 V^2}{h^2}} = \\ \widetilde{\mu} \bigg\{ 2 \xi^2 \Bigg[\bigg(\frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial \widetilde{x}_1} \bigg)^2 + \bigg(\frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial \widetilde{x}_2} \bigg)^2 + \bigg(\frac{\partial \widetilde{u}_3}{\partial \widetilde{x}_3} \bigg)^2 + \frac{\partial \widetilde{u}_3}{\partial \widetilde{x}_2} \frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial \widetilde{x}_3} + \frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial \widetilde{x}_3} \frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial \widetilde{x}_1} + \frac{1}{2} \bigg(\frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial \widetilde{x}_1} \bigg)^2 + \frac{1}{2} \bigg(\frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial \widetilde{x}_2} \bigg)^2 \bigg] + \\ &+ \xi^4 \Bigg[\bigg(\frac{\partial \widetilde{u}_3}{\partial \widetilde{x}_2} \bigg)^2 + \bigg(\frac{\partial \widetilde{u}_3}{\partial \widetilde{x}_1} \bigg)^2 \bigg] + \bigg(\frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial \widetilde{x}_3} \bigg)^2 + \bigg(\frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial \widetilde{x}_3} \bigg)^2 \bigg\} \end{split}$$
(II.16)

Equations de Navier :

$$\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{x}_{1}} = -\xi \mathfrak{R}_{h} \widetilde{\rho} \frac{D\widetilde{u}_{1}}{D\widetilde{t}} + \xi^{2} \left[\widetilde{\mu} \left(\left(\frac{\partial^{2}}{\partial \widetilde{x}_{1}^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial \widetilde{x}_{2}^{2}} \right) \widetilde{u}_{1} + \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_{1}} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_{j}}{\partial \widetilde{x}_{j}} \right) \right) + 2 \frac{\partial \widetilde{\mu}}{\partial \widetilde{x}_{1}} \frac{\partial \widetilde{u}_{1}}{\partial \widetilde{x}_{1}} + \frac{\partial}{\partial \widetilde{u}_{2}} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_{1}}{\partial \widetilde{x}_{2}} + \frac{\partial \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{1}} \right) + \frac{\partial \widetilde{\mu}}{\partial \widetilde{x}_{3}} \frac{\partial \widetilde{u}_{3}}{\partial \widetilde{x}_{1}} \right] + \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_{3}} \left(\widetilde{\mu} \frac{\partial \widetilde{u}_{1}}{\partial \widetilde{x}_{3}} \right) \tag{II.17}$$

$$\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{x}_{2}} = -\widetilde{\rho} \xi \mathfrak{R}_{h} \frac{D\widetilde{u}_{2}}{D\widetilde{t}} + \xi^{2} \left[\widetilde{\mu} \left(\left(\frac{\partial^{2}}{\partial \widetilde{x}_{1}^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial \widetilde{x}_{2}^{2}} \right) \widetilde{u}_{2} + \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_{2}} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_{j}}{\partial \widetilde{x}_{j}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \widetilde{u}_{1}} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{1}} + \frac{\partial}{\partial \widetilde{u}_{1}} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_{2}} \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_{2}} \frac{\partial \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{2}} + \frac{\partial}{\partial \widetilde{u}_{3}} \frac{\partial}{\partial \widetilde{u}_{3}} \right) + \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_{3}} \left(\widetilde{\mu} \frac{\partial \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{3}} \right) \tag{II.18}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_{3}} = -\xi^{3} \Re_{h} \tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}_{3}}{D\tilde{t}} + \xi^{4} \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial^{2} \tilde{u}_{3}}{\partial \tilde{x}_{1}^{2}} + \frac{\partial^{2} \tilde{u}_{3}}{\partial \tilde{x}_{2}^{2}} \right) + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_{1}} \frac{\partial \tilde{u}_{3}}{\partial \tilde{x}_{1}} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_{2}} \frac{\partial \tilde{u}_{3}}{\partial \tilde{x}_{2}} \right] +$$

$$\xi^{2} \left[\widetilde{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_{3}} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_{j}}{\partial \widetilde{x}_{j}} \right) + \frac{\partial^{2} \widetilde{u}_{3}}{\partial \widetilde{x}_{3}^{2}} \right) + 2 \frac{\partial \widetilde{\mu}}{\partial \widetilde{x}_{3}} \frac{\partial \widetilde{u}_{3}}{\partial \widetilde{x}_{3}} + \frac{\partial \widetilde{\mu}}{\partial \widetilde{x}_{1}} \frac{\partial \widetilde{u}_{1}}{\partial \widetilde{x}_{3}} + \frac{\partial \widetilde{\mu}}{\partial \widetilde{x}_{2}} \frac{\partial \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{3}} \right]$$
(II.19)

avec : $\xi = \frac{h}{L}$ paramètre d'échelle qui est de l'ordre de 10^{-3} .

$$\frac{D\widetilde{u}_{i}}{D\widetilde{t}} = \frac{\partial \widetilde{u}_{i}}{\partial \widetilde{t}} + \widetilde{u}_{j} \frac{\partial \widetilde{u}_{i}}{\partial \widetilde{x}_{i}} \text{ et } \mathfrak{R}_{h} = \xi \mathfrak{R}_{L} = \frac{\rho_{0} V h}{\mu_{0}} = \frac{V h}{\nu_{0}}.$$

 $\mathfrak{R}_{\scriptscriptstyle h}$ et $\mathfrak{R}_{\scriptscriptstyle L}$ étant respectivement les nombres de Reynolds relatif à l'épaisseur et à la longueur de l'écoulement.

En négligeant les termes multipliés soit par ξ^2 , soit par ξ^3 ou ξ^4 , il reste :

-Fonction de dissipation :

$$\Phi = \widetilde{\mu} \left[\left(\frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial \widetilde{x}_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial \widetilde{x}_3} \right)^2 \right]$$
(II.20)

Equations de Navier :

$$\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{x}_{i}} = -\xi \mathfrak{R}_{h} \widetilde{\rho} \frac{D\widetilde{u}_{i}}{D\widetilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_{3}} \left(\widetilde{\mu} \frac{\partial \widetilde{u}_{i}}{\partial \widetilde{x}_{3}} \right), \quad i = 1, 2$$
(II.21)

$$\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{x}_3} = 0 \tag{II.22}$$

L'équation (II.22) montre que la pression est indépendante de la variable d'espace x_3 .

Les termes en $\xi \Re_h$ ou termes d'inertie de l'équation (II.21) sont plus souvent négligeables devant les termes de viscosité; ceci est vérifié dans la plupart des écoulements rencontrés en lubrification hydrodynamique. Quelques exceptions se rencontrent toutefois quand la viscosité cinématique du fluide $\left(\upsilon = \frac{\mu}{\rho}\right)$ est faible (cas des métaux liquides), quand l'épaisseur du film est importante ou quand les vitesses linéaires sont très élevées.

Si $\xi \Re_h \langle \langle 1, \text{ les équations de Navier s'écrivent : }$

$$\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{x}_{1}} = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_{3}} \left(\widetilde{\mu} \frac{\partial \widetilde{u}_{1}}{\partial \widetilde{x}_{3}} \right) \tag{II.23a}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} \right) \tag{II.23b}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_3} = 0 \tag{II.23c}$$

Le système d'équation (II.23), auquel s'ajoute l'équation de continuité (II.8) et l'équation d'énergie (II.10) permettent de déterminer, compte tenu des conditions aux limites et après intégration, le champ de vitesses u_1 , u_2 et u_3 , la pression p et la température dans le film. Si le régime d'écoulement est supposé isotherme (T = Constante), l'équation d'énergie ne sera pas prise en considération.

II.4. Equations de la lubrification hydrodynamique par fluide incompressible.

II.4.1 Fonction de dissipation en variables dimensionnées

En variables dimensionnées, l'équation (II.20) s'écrit :

$$\Phi = \mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]$$
(II.24)

II.4.2 Equation de la mécanique des films minces visqueux généralisée

En revenant aux variables dimensionnées, le système (II.23) s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \tag{II.25a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \tag{II.25b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \to p = p(x_1, x_2, t) \tag{II.25c}$$

où:
$$p = p(x_1, x_2, t), \mu = \mu(x_1, x_2, x_3, t) \rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$$

L'intégration des équations de Navier (II.25) nécessite la connaissance des conditions limites sur la vitesse (conditions de non glissement) figure II.3 :

-Pour
$$x_3 = h_1(x_1, x_2, t)$$
: paroi (S_1)

$$u_1(x_1, x_2, h_1) = U_{12}; u_2(x_1, x_2, h_1) = U_{12}; u_3(x_1, x_2, h_1) = U_{13}$$
 (II.26)

-Pour
$$x_3 = h_2(x_1, x_2, t)$$
: paroi (S_2)

$$u_1(x_1, x_2, h_2) = U_{21}; u_2(x_1, x_2, h_2) = U_{22}; u_3(x_1, x_2, h_2) = U_{23}$$
 (II.27)

 h_1 et h_2 étant les équations des surfaces ou des parois (S_1) et (S_2) figure II.3.

Dans les équations (II.26) et (II.27), les termes U_{ij} (i=1,2 et j=1,2,3) représentent les composantes des vitesses des surfaces, le premier indice se réfère aux surfaces (S_1) ou (S_2), le second aux directions x_1, x_2 ou x_3 comme c'est illustré sur la figure II.3.

Une première intégration des équations (II.25a) et (II.25.b) par rapport à la variable x_3 donne :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_3 + \frac{C_1}{\mu} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \tag{II.28a}$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} x_3 + \frac{C_2}{\mu} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3}$$
 (II.28b)

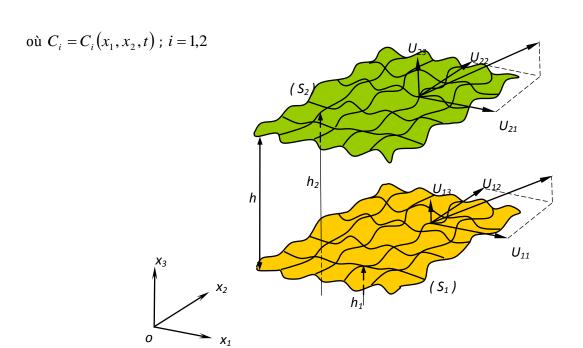


Fig. II.3 Géométrie et Cinématique d'un contact hydrodynamique.

Une deuxième intégration par rapport à x_3 , conduit aux relations suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}I + C_1J = \int_{h_1}^{x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3$$
 (II.29a)

$$\frac{\partial p}{\partial x_2}I + C_2J = \int_{h_1}^{x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \tag{II.29b}$$

où
$$I = \int_{h_1}^{x_3} \frac{\zeta d\zeta}{\mu(x_1, x_2, \zeta, t)}$$
 et $J = \int_{h_1}^{x_3} \frac{d\zeta}{\mu(x_1, x_2, \zeta, t)}$

Détermination de la constante $\,C_1\,$:

Nous remarquons que pour $x_3=h_1$, nous avons ${\it I}={\it J}=0$ et pour $x_3=h_2$,

$$I_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{x_3 dx_3}{\mu(x_1, x_2, x_3, t)}$$
 et $J_2 = \int_{h_{11}}^{x_3} \frac{dx_3}{\mu(x_1, x_2, x_3, t)}$

Notons $U_{21} = u_1(x_1, x_2, h_2, t)$ pour $x_3 = h_2(x_1, x_2, t)$ et pour $x_3 = h_2$, l'équation (II.29) s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} I_2 + C_1 J_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 = U_{21} - U_{11}$$

Soit:
$$C_1 = \frac{1}{J_2} \left(U_{21} - U_{11} - I_2 \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)$$

En remplaçant C_1 par son expression, l'équation (II.29a) prend la forme suivante :

$$u_1(x_1, x_2, x_3, t) = U_{11} + \left(I - \frac{I_2}{J_2}J\right) \frac{\partial p}{\partial x_1} + J \frac{\left(U_{21} - U_{11}\right)}{J_2}$$
(II.30)

En procédant de la même manière pour l'équation (II.29b), nous trouvons :

$$u_{2}(x_{1}, x_{2}, x_{3}, t) = U_{13} + \left(I - \frac{I_{2}}{J_{2}}J\right) \frac{\partial p}{\partial x_{2}} + J \frac{\left(U_{22} - U_{12}\right)}{J_{2}}$$
(II.31)

L'intégration de l'équation de continuité (II.1) à travers l'épaisseur du film donne :

$$\int_{h_1(x_1,x_2,t)}^{h_2(x_1,x_2,t)} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_3) \right] dx_3 + \int_{h_1(x_1,x_2,t)}^{h_2(x_1,x_2,t)} \frac{\partial}{\partial t} dx_3 = 0$$
(II.32)

avec:
$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_3) dx_3 = [\rho u_3]_{h_1}^{h_2} = \rho_2 U_{23} - \rho_1 U_{13}$$

Pour calculer les trois autres intégrales, nous devons utiliser la règle de dérivation sous le signe intégrale dite règle de Leibnitz :

$$\int_{h_{1}(x_{1},x_{2},t)}^{h_{2}(x_{1},x_{2},t)} \frac{\partial F(x_{1},x_{2},x_{3}t)}{\partial x_{i}} dx_{3} = \frac{\partial}{\partial x_{i}} \left(\int_{h_{1}}^{h_{2}} F(x_{1},x_{2},x_{3},t) dx_{3} \right) - F(x_{1},x_{2},h_{2},t) \frac{\partial h_{2}}{\partial x_{i}} + F(x_{1},x_{2},h_{1},t) \frac{\partial h_{1}}{\partial x_{i}}$$
(II.33)

où F est une fonction continument dérivable et i=1,2,3

Il vient alors:

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1) dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{h_1}^{h_2} \rho u_1 dx_3 \right) - \rho_2 U_{21} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \rho_1 U_{11} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}$$

$$\int_{h_{1}}^{h_{2}} \frac{\partial}{\partial x_{2}} (\rho u_{2}) dx_{3} = \frac{\partial}{\partial x_{2}} \left(\int_{h_{1}}^{h_{2}} \rho u_{2} dx_{3} \right) - \rho_{2} U_{22} \frac{\partial h_{2}}{\partial x_{2}} + \rho_{1} U_{12} \frac{\partial h_{1}}{\partial x_{2}}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_3 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{h_1}^{h_2} \rho dx_3 \right) - \rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial t}$$

L'équation (II.31) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x_{1}} \left(\int_{h_{1}}^{h_{2}} \rho u_{1} dx_{3} \right) - \rho_{2} U_{21} \frac{\partial h_{2}}{\partial x_{1}} + \rho_{1} U_{11} \frac{\partial h_{1}}{\partial x_{1}} + \frac{\partial}{\partial x_{2}} \left(\int_{h_{1}}^{h_{2}} \rho u_{2} dx_{3} \right) - \rho_{2} U_{22} \frac{\partial h_{2}}{\partial x_{2}} + \rho_{1} U_{12} \frac{\partial h_{1}}{\partial x_{2}} + \rho_{2} U_{23} - \rho_{1} U_{13} + \frac{\partial}{\partial x_{2}} \frac{\partial h_{2}}{\partial t} - \rho_{2} \frac{\partial h_{2}}{\partial t} + \rho_{1} \frac{\partial h_{1}}{\partial t} = 0$$
(II.34)

avec :
$$R_2 = \int_{h_1}^{h_2} \rho dx_3$$

Après intégration par parties, les deux intégrales figurant dans l'équation (II.34) s'expriment comme suit :

$$\int_{h_1}^{h_2} \rho u_1 dx_3 = R_2 U_{21} - G \frac{\partial p}{\partial x_1} - F (U_{21} - U_{11})$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \rho u_2 dx_3 = R_2 U_{22} - G \frac{\partial p}{\partial x_2} - F (U_{22} - U_{12})$$

Soit par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial x_{1}} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_{1}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_{2}} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_{2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_{1}} \left[U_{21} (R_{2} - F) + U_{11} F \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{2}} \left[U_{22} (R_{2} - F) + U_{12} F \right] - \rho_{2} U_{21} \frac{\partial h_{2}}{\partial x_{1}} +$$

$$\rho_{1} U_{11} \frac{\partial h_{1}}{\partial x_{1}} + \rho_{2} U_{23} - \rho_{1} U_{13} - \rho_{2} U_{22} \frac{\partial h_{2}}{\partial x_{2}} +$$

$$\rho_{1} U_{12} \frac{\partial h_{1}}{\partial x_{2}} + \frac{\partial R_{2}}{\partial t} - \rho_{2} \frac{\partial h_{2}}{\partial t} + \rho_{1} \frac{\partial h_{1}}{\partial t} \tag{II.35}$$

avec:
$$F = \frac{1}{J_2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{R}{\mu} dx_3$$
; $G = \int_{h_1}^{h_2} \frac{R}{\mu} \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2} \right) dx_3 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{R}{\mu} x_3 dx_3 - I_2 F$

L'équation (II.35) est l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée. Pour l'obtenir, il a été nécessaire de poser les hypothèses suivantes :

- le milieu est continu,
- le fluide est newtonien,
- l'écoulement est laminaire,
- les forces de volume et d'inertie sont négligeables,
- il n'ya pas de glissement entre la particule de fluide et les parois du contact,
- l'épaisseur du film mesurée suivant la direction ox_3 est toujours très faible devant les autres dimensions du contact; c'est l'hypothèse de base de la lubrification.

Dans l'équation (III.35) :

- le terme $\frac{\partial}{\partial x_1} \big[U_{21} \big(R_2 - F \big) + U_{11} F \big] - \frac{\partial}{\partial x_1} \bigg(G \frac{\partial p}{\partial x_1} \bigg) \text{ représente la variation du débit massique dans la direction } x_1 \text{ pour une section de dimension } \big(h_2 - h_1 \big) \text{ suivant } x_3 \text{ et unité suivant } x_2 \,.$

- le terme
$$\frac{\partial}{\partial x_2} [U_{22}(R_2 - F) + U_{12}F] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_2}\right)$$
 représente la variation du débit massique dans la

direction x_2 pour une section de dimension $(h_2 - h_1)$ suivant x_3 et unité suivant x_1 .

Dans les deux expressions ci-dessus le premier terme correspond au débit dû au déplacement

des parois (écoulement de Couette dû au cisaillement du fluide). Le second terme correspond au débit dû au gradient de pression (écoulement de Poiseuille dû à la pression).

-le terme
$$\rho_{\rm l} \bigg(U_{11} \frac{\partial h_{\rm l}}{\partial x_{\rm l}} + U_{12} \frac{\partial h_{\rm l}}{\partial x_{\rm 2}} - U_{13} \bigg) - \rho_{\rm 2} \bigg(U_{21} \frac{\partial h_{\rm 2}}{\partial x_{\rm l}} + U_{22} \frac{\partial h_{\rm 2}}{\partial x_{\rm 2}} - U_{23} \bigg) \text{ représente la variation du débit}$$
 massique dans la direction $x_{\rm 3}$ pour une section unité.

ele terme
$$\frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial t}$$
 caractérise l'effet transitoire dû à la compressibilité du fluide.

Notons que l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée s'applique à différents lubrifiants et à différents type de contact. Nous pouvons distinguer :

-Fluide compressible ou incompressible, dans ce dernier cas la masse volumique peut être éliminée de l'équation (II.35).

-Fluide de viscosité variable ou constante, dans ce dernier cas cette équation se simplifie considérablement.

-Contact hydrodynamique ou hydrostatique dans ce dernier l'équation (II.35) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = 0 \tag{II.36}$$

Notons que l'équation différentielle aux dérivées partielles (II.36) admet une solution non triviale si et seulement si p n'est pas nulle en tous points de la frontière du domaine d'intégration; ce qui impose physiquement une source de pression extérieure au contact (cavité, alvéole, ...).

-régime transitoire et régime permanent : nous définissons en mécanique des films minces visqueux, le régime permanent comme un régime de fonctionnement tel que dans un repère particulier mobile ou non, les paramètres géométriques du contact et les vitesses des parois sont indépendants du temps.

II.4.3 Equation de la mécanique des films minces visqueux

Dans le cas où la température ne varie pas selon l'épaisseur du film ; i.e. $\frac{\partial T}{\partial x_3} = 0$ et si nous supposons que la viscosité μ et la masse volumique ρ du fluide ne sont fonction que de la température et de la pression, nous pouvons écrire :

$$\mu = \mu(T, p)$$
 et $\rho = \rho(T, p)$ avec $T = T(x_1, x_2, t)$ et $p = p(x_1, x_2, t)$

Il vient alors : $\mu = \mu(x_1, x_2, t)$ et $\rho = \rho(x_1, x_2, t)$; c'est-à-dire $\frac{\partial \mu}{\partial x_3} = \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = 0$. Dans ces conditions, on peut écrire : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$; $R_2 = \int_{h_1}^{h_2} \rho(x_1, x_2, t) dx_3 = \rho(h_2 - h_1)$;

$$I_{2} = \int_{h_{1}}^{h_{2}} \frac{x_{3} dx_{3}}{\mu(x_{1}, x_{2}, t)} = \frac{1}{2\mu} (h_{2}^{2} - h_{1}^{2}); J_{2} = \int_{h_{1}}^{h_{2}} \frac{dx_{3}}{\mu(x_{1}, x_{2}, t)} = \frac{1}{\mu} (h_{2} - h_{1}); R = \int_{h_{1}}^{x_{3}} \rho(x_{1}, x_{2}, t) dx_{3} = \rho(x_{3} - h_{1});$$

$$I = \frac{1}{\mu} \left(\frac{x_{3}^{2} - h_{1}^{2}}{2} \right); J = \frac{1}{\mu} (x_{3} - h_{1}); F = \frac{\rho(h_{2} - h_{1})}{2};$$

$$G = \frac{1}{\mu} \int_{h_{1}}^{h_{2}} R \left(x_{3} - \frac{I_{2}}{J_{2}} \right) dx_{3} = \frac{1}{\mu} \int_{h_{1}}^{h_{2}} \rho(x_{3} - h_{1}) \left(x_{3} - \frac{I_{2}}{J_{2}} \right) dx_{3} = \frac{\rho}{12\mu} (h_{2} - h_{1})^{3};$$

$$U_{21}(R_{2} - F) + U_{11}F = \frac{\rho}{2} (h_{2} - h_{1})(U_{21} + U_{11}); U_{22}(R_{2} - F) + U_{12}F = \frac{\rho}{2} (h_{2} - h_{1})(U_{22} + U_{12})$$

Compte tenu de ces relations, l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée (II.35) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x_{1}} \left[\rho \frac{(h_{2} - h_{1})^{3}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_{1}} \right] + \frac{\partial}{\partial x_{2}} \left[\rho \frac{(h_{2} - h_{1})^{3}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_{2}} \right] =$$

$$6 \frac{\partial}{\partial x_{1}} \left[\rho (U_{11} + U_{21})(h_{2} - h_{1}) \right] - 12\rho U_{21} \frac{\partial h_{2}}{\partial x_{1}} + 12\rho U_{11} \frac{\partial h_{1}}{\partial x_{1}} +$$

$$6 \frac{\partial}{\partial x_{2}} \left[\rho (U_{12} + U_{22})(h_{2} - h_{1}) \right] - 12\rho U_{22} \frac{\partial h_{2}}{\partial x_{2}} + 12\rho U_{12} \frac{\partial h_{1}}{\partial x_{2}} +$$

$$12\rho (U_{23} - U_{13}) + 12(h_{2} - h_{1}) \frac{\partial \rho}{\partial t}$$
(II.37)

L'équation (II.37) est appelée : équation de la mécanique des films minces visqueux.

Cette équation est généralement employée pour étudier l'effet des défauts de forme et des rugosités de surfaces sur les caractéristiques de fonctionnement d'un contact en régime isotherme. Notons cependant que la viscosité et la masse volumique du fluide peuvent varier en fonction des variables x_1, x_2 et t.

Les vitesses u_1 et u_2 s'expriment cette fois-ci par :

$$\begin{cases}
 u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \left[x_3^2 - x_3(h_1 + h_2) + h_1 h_2 \right] + \frac{U_{11} - U_{21}}{h_1 - h_2} (x_3 - h_1) + U_{11} \\
 u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} \left[x_3^2 - x_3(h_1 + h_2) + h_1 h_2 \right] + \frac{U_{12} - U_{22}}{h_1 - h_2} (x_3 - h_1) + U_{12}
\end{cases}$$
(II.38)

Les contraintes de cisaillement dans le film s'écrivent :

$$\begin{cases}
\sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_1} (2x_3 - h_1 - h_2) + \mu \frac{(U_{11} - U_{21})}{h_1 - h_2} \\
\sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_2} (2x_3 - h_1 - h_2) + \mu \frac{(U_{12} - U_{22})}{h_1 - h_2}
\end{cases} \tag{II.39}$$

II.4.4 Equation de Reynolds généralisée

Lorsque la vitesse d'une paroi du contact est tangente en tous points à cette paroi (cas fréquent en lubrification), l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée (II.35) se simplifie car en plaçant l'origine du système d'axes sur cette paroi, nous pouvons poser $h_1 = 0$ et $h_2 = h$ figure (II.4).

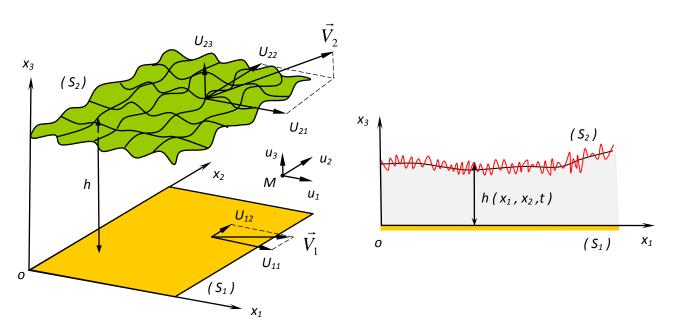


Fig. II.4 Système d'axes et conditions aux limites sur les vitesses.

Dans le système d'axes choisi, les conditions aux limites sur la vitesse s'écrivent :

-Sur la paroi
$$(S_1)$$
, pour $x_3 = 0$, $u_1 = U_{11}$, $u_2 = U_{12}$, $u_3 = 0$

-Sur la paroi
$$(S_2)$$
, pour $x_3 = h$, $u_1 = U_{21}$, $u_2 = U_{22}$, $u_3 = U_{23}$

Remarquons que le choix du système d'axes impose à la vitesse U_{13} de la paroi (S_1) dans la direction x_3 d'être identiquement nulle. Les vitesses u_1 et u_2 du fluide s'écrivent alors :

$$\begin{cases} u_{1} = \frac{\partial p}{\partial x_{1}} \left(I - \frac{I_{2}}{J_{2}} J \right) + \frac{U_{21} - U_{11}}{J_{2}} J + U_{11} \\ u_{2} = \frac{\partial p}{\partial x_{2}} \left(I - \frac{I_{2}}{J_{2}} J \right) + \frac{U_{22} - U_{12}}{J_{2}} J + U_{12} \end{cases}$$
(II.40)

Dans ces relations :
$$I = \int_0^{x_3} \frac{\zeta d\zeta}{\mu}$$
 ; $J = \int_0^{x_3} \frac{d\zeta}{\mu}$; $I_2 = \int_0^h \frac{x_3}{\mu} dx_3$; $J_2 = \int_0^h \frac{dx_3}{\mu}$

De ces expressions, nous déduisons les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\begin{cases}
\sigma_{13} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2}\right) \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{U_{21} - U_{11}}{J_2} \\
\sigma_{23} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \left(x_3 - \frac{I_2}{J_2}\right) \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{U_{22} - U_{12}}{J_2}
\end{cases} \tag{II.41}$$

Dans ces conditions, l'équation de la mécanique des fils minces visqueux généralisée (II.35) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_{1}} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_{1}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_{2}} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_{2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_{1}} \left[U_{21} (R_{2} - F) + U_{11} F \right] - \rho_{2} U_{21} \frac{\partial h}{\partial x_{1}} + \frac{\partial}{\partial x_{2}} \left[U_{22} (R_{2} - F) + U_{12} F \right] - \rho_{2} U_{22} \frac{\partial h}{\partial x_{2}} + \frac{\partial R_{2}}{\partial t} - \rho_{2} \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_{2} U_{23} \right]$$
(II.42)

avec
$$G = \int_0^h \frac{R}{\mu} x_3 dx_3 - I_2 F$$
; $F = \frac{1}{J_2} \int_0^h \frac{R}{\mu} dx_3$; $R = \int_0^{x_3} \rho(x_1, x_2, \zeta, t) d\zeta$ et $R_2 = \int_0^h \rho dx_3$

L'équation (II.42) est communément connue sous le nom d'équation de Reynolds généralisée.

Les relations (II.40), (II.41) et l'équation de Reynolds généralisée (II.42) doivent être utilisées pour l'étude des contacts lubrifiés dans lesquels nous tenons compte des effets thermiques.

Il faut de plus:

- -l'équation de continuité pour calculer la vitesse u_3 dans le fluide,
- -l'équation de l'énergie pour calculer le champ de température dans le fluide,
- -les relations qui donnent les variations de la masse volumique et de la viscosité avec la température. Dans le cas des lubrifiants liquides, la masse volumique est généralement supposée constante.
- -l'équation de la chaleur pour déterminer le champ de température dans les solides délimitant le contact.
- -l'équation d'état du gaz $f(p, \rho, t) = 0$.

II.4.5. Equation de Reynolds

Très souvent, nous admettons que la masse volumique et la viscosité ne varient pas selon l'épaisseur du film et nous plaçons l'origine du système d'axes sur l'une des parois du contact. L'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée (II.35) prend alors une forme simple ; c'est l'équation de Reynolds qui s'écrit en coordonnées cartésiennes figure II.4 :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = 6\rho \left(U_{11} - U_{21} \right) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{12} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{12} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{12} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{12} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{12} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{12} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{12} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{12} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{12} \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 6\rho \left(U_{12} - U_{12} \right)$$

$$6h\frac{\partial}{\partial x_{1}} \left[\rho (U_{11} + U_{21}) \right] + 6h\frac{\partial}{\partial x_{2}} \left[\rho (U_{12} + U_{22}) \right] + 12\rho U_{23} + 12h\frac{\partial\rho}{\partial t}$$
(II.43)

où
$$U_{23} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_{21} \frac{\partial h}{\partial x_1} + U_{22} \frac{\partial h}{\partial x_2}$$
 (II.44)

Les composantes de la vitesse du fluide u_1 et u_2 dans les directions x_1 et x_2 s'écrivent :

$$\begin{cases}
 u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_3(x_3 - h) + \frac{h - x_3}{h} U_{11} + \frac{x_3}{h} U_{21} \\
 u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} x_3(x_3 - h) + \frac{h - x_3}{h} U_{12} + \frac{x_3}{h} U_{22}
\end{cases}$$
(II.45)

De ces relations, nous déduisons les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\begin{cases}
\sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_1} (2x_3 - h) + (U_{21} - U_{11}) \frac{\mu}{h} \\
\sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_2} (2x_3 - h) + (U_{22} - U_{12}) \frac{\mu}{h}
\end{cases} \tag{II.46}$$

Autre écriture de l'équation de Reynolds :

En remplaçant U_{23} par son expression (Eq. II.44), l'équation de Reynolds (II.43) prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_{1}} \left(\frac{\rho h^{3}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_{1}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_{2}} \left(\frac{\rho h^{3}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_{2}} \right) = 6\rho \left(U_{11} + U_{21} \right) \frac{\partial h}{\partial x_{1}} + 6\rho \left(U_{12} + U_{22} \right) \frac{\partial h}{\partial x_{2}} + 6\rho \left(U_{11} + U_{21} \right) \right] + 6h \frac{\partial}{\partial x_{1}} \left[\rho \left(U_{11} + U_{21} \right) \right] + 6h \frac{\partial}{\partial x_{2}} \left[\rho \left(U_{12} + U_{22} \right) \right] + 12 \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho h \right) \tag{II.47}$$

ou encore:

$$\vec{\nabla} \bullet \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \vec{\nabla} p \right) = 6 \vec{\nabla} \bullet \left(\rho h \vec{U} \right) + 12 \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \tag{II.48}$$

avec
$$\vec{U} = \begin{cases} U_{11} + & U_{21} \\ U_{12} + & U_{22} \end{cases}$$
 et $\vec{\nabla} p = \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} \end{cases}$

En utilisant la notation matricielle, l'équation (II.48) peut s'écrire :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_{1}} : \frac{\partial}{\partial x_{2}} \right\rangle \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\rho h^{3}}{\mu} & \partial p / \\ \frac{\rho h^{3}}{\mu} & \partial p / \\ \frac{\rho h^{3}}{\mu} & \partial p / \\ \frac{\rho h}{\partial x_{2}} \end{array} \right\} = 6 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{1}} : \frac{\partial}{\partial x_{2}} \right\rangle \left\{ \begin{array}{ccc} \rho h (U_{11} + U_{21}) \\ \rho h (U_{12} + U_{22}) \end{array} \right\} + 12 \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \tag{II.49}$$

Si le liquide est incompressible; c'est-à-dire ρ = constante, l'équation (II.48) devient :

$$\vec{\nabla} \bullet \left(\frac{h^3}{\mu} \vec{\nabla} p\right) = 6 \vec{\nabla} \bullet \left(h \vec{U}\right) + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \tag{II.50}$$

En régime permanent ou stationnaire, l'équation (II.50) se réduit à :

$$\vec{\nabla} \bullet \left(\frac{h^3}{\mu} \vec{\nabla} p - 6h \vec{U} \right) = 0 \tag{II.51}$$

II.4.6 Conditions limites associées à l'équation hydrodynamique incompressible

Le champ de pression p dans le film fluide doit satisfaire à l'équation de Reynolds (II.51) ainsi qu'aux conditions limites suivantes figure II.5 :

$$\begin{cases} p = p_0 & \operatorname{sur}(\Gamma_1) \\ \vec{n} \bullet \left(\frac{\vec{U}h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \vec{\nabla}p\right) = q_n & \operatorname{sur}(\Gamma_2) \end{cases}$$
(II.52)

où : \vec{n} est le vecteur normal unitaire, $q_n = \vec{Q} \bullet \vec{n}$ est le débit volumique normal à travers la frontière (Γ_2) , (Γ_1) et (Γ_2) sont les frontières du domaine d'intégration $(\Omega) \subset R^2$ tel que

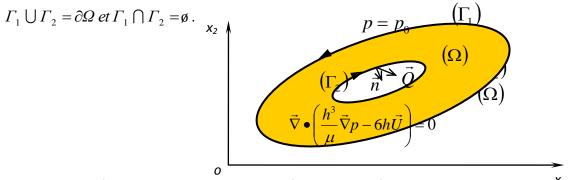


Fig. II.5 Représentation du domaine d'intégration de l'équation de Reynolds et des conditions limites sur les frontières.

Selon la géométrie et la cinématique du contact étudié, la pression calculée à partir de l'équation de Reynolds (II.50) ou (II.51) et des conditions limites qui lui sont associées peut être inférieure à la pression atmosphérique (dépression) en certains points du domaine (Ω) .

Ces dépressions entrainent une rupture du film lubrifiant. Ainsi, dans le domaine (Ω) , nous distinguons figure II.5 :

-des régions actives où la pression relative est positive, donc génératrice d'une force portante ;

-des régions inactives ou de cavitation où la pression relative qui y règne est négative ou nulle. Dans ces conditions, l'air ambiant peut y être aspiré et le lubrifiant liquide se vaporise à température ambiante.

Les visualisations de l'écoulement dans certains contacts mettent en évidence dans la zone de rupture de film, une juxtaposition de filets d'air (gaz) et de lubrifiant (liquide), Figures II.6-II.7.

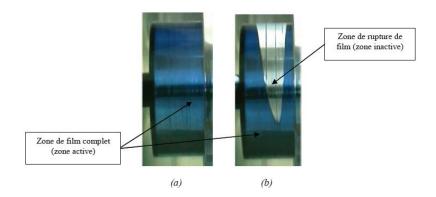


Fig. II.6 Représentation des zones active et inactive dans un palier lisse soumis à un chargement statique : (a) Film complet, (b) Film rompu.

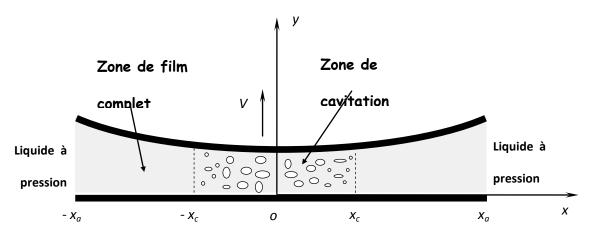


Fig. II.7 Vue en coupe des zones de film complet et de cavitation dans un palier à film amortisseur (SFDB).

Remarques

-Les études expérimentales montrent que dans la zone de rupture, la pression est constante et égale ou légèrement inférieure à la pression atmosphérique car le lubrifiant est souvent en contact avec le milieu extérieur, la pression atmosphérique et la pression de vapeur saturante sont voisines.

-Les frontières entre les régions actives et inactives sont des inconnues supplémentaires du problème ; pour ces frontières nous devons avoir simultanément p=0 et $\vec{\nabla} p=0$ car au passage des frontières la conservation du débit volumique implique $\vec{\nabla} p=0$.

-Les dispositifs hydrodynamiques peuvent être différenciés du point de vue de la cavitation.

En effet un patin ne représente qu'un convergent donc ne cavitera pas figure II.8 tandis qu'un palier cylindrique présente nécessairement un divergent donc pourra caviter.

-La rupture du film lubrifiant n'a pas nécessairement un effet néfaste. En effet, une butée symétrique ne peut supporter une charge appliquée verticale que s'il y a rupture du film d'huile figure II.9. De même, un palier lisse cylindrique où il n'y aurait pas rupture du film lubrifiant serait toujours instables du point de vue vibratoire.

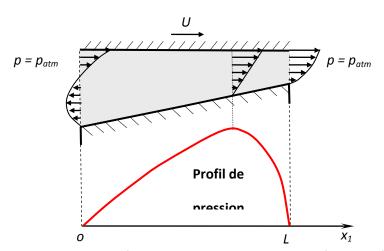


Fig. II.8 Schématisation d'un patin de butée inclinée.

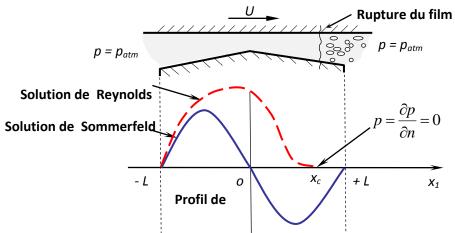


Fig. II.9 Schématisation d'une butée symétrique.

Dans la littérature [26], les conditions de cavitation souvent utilisées dans les études de simulation des problèmes de lubrification hydrodynamique sont :

-Conditions aux limites dites de Reynolds :

Lorsque les conditions de fonctionnement permettent au film lubrifiant de se reformer au niveau des rainures d'alimentation, la frontière d'alimentation de rupture du film est déterminée et seule la frontière de reformation demeure une inconnue du problème. On a précisé que la pression et sa dérivée normale s'annulent le long de la frontière de rupture du film. Ces conditions déjà proposées par Swift [27] sont connus aujourd'hui sous le nom de conditions limites de Reynolds et s'écrivent :

$$p = \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \qquad \text{Sur la frontière de rupture du film}$$
 (II.53)

Ces conditions, fréquemment utilisées, permettent d'avoir une continuité du débit entre les régions actives et inactives et donnent des résultats comparables aux résultats expérimentaux.

- Conditions limites de Gümbel ou de demi-Sommerfeld :

Ce sont des conditions qui ont été initialement introduites pour prendre en compte la rupture du film lubrifiant. En 1921, Gümbel [28] propose tout simplement de négliger dans la solution finale les pressions inférieures à la pression atmosphérique. Il faut toutefois noter que ces conditions limites ne respectent bien évidemment pas la continuité du débit. En pratique elles sont fréquemment utilisées (dans le cas des paliers fortement chargés) et les résultats théoriques obtenus sont souvent proches des résultats expérimentaux.

II.5. Calcul des performances hydrodynamiques

II.5.1. Champ de pression dans le film

Le champ de pression hydrodynamique est obtenu à partir de l'intégration de l'équation de Reynolds (II.51) en satisfaisant les différentes conditions aux limites sur la pression liées à l'alimentation, à l'écoulement du fluide dans le contact et à l'environnement dans lequel fonctionne le mécanisme. La connaissance du champ de pression permettra de déduire aisément les différentes caractéristiques du contact tel que la portance, la force de frottement, les débits de fuite et la puissance dissipée.

II.5.2. Action du fluide sur les surfaces du contact

L'action de contact \vec{t} (figure II.10), appelée habituellement le vecteur contrainte, exercée en un point M de la paroi, dépend uniquement du tenseur des contraintes en ce point et du vecteur normal \vec{n} , i.e.

$$t_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji} n_j$$
 $i = 1, 2, 3$ (II.54)

où : $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ est le tenseur des contraintes et n_j représente les composantes du vecteur normal en M_1 ou M_2 orienté de la surface vers le fluide (normale extérieure).

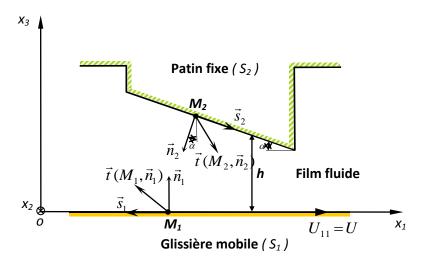


Fig. II.10 Action du fluide sur les parois d'un contact hydrodynamique

En un point M du fluide, la matrice représentative du tenseur des contraintes s'écrit :

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ 0 & -p & \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & -p \end{bmatrix}$$

$$(II.55)$$

Les éléments de réduction en un point C quelconque du tenseur des actions de contact du fluide sur la surface (Ω) du contact seront donc :

- Résultante :
$$\vec{R} = \iint_{\Omega} \vec{t} d\Omega = \iint_{\Omega} [\sigma_{ij}] \{n\} d\Omega$$

- Moment en C : $\vec{M}(C) = \iint_{\Omega} \overrightarrow{CM} \wedge \vec{t} d\Omega$ (II.56)

Dans un repère (x_1, x_2, x_3) (figure II.10), les cosinus directeurs de la normale sont :

$$\left\{ \vec{n}_{2} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{array} \right\} \tag{II.57}$$

Soit:

$$\left[\sigma_{ij}(M_{2})\right] \left\{\vec{n}_{2}\right\} = \begin{cases} p \sin \alpha - \mu \cos \alpha \frac{\partial u_{1}}{\partial x_{3}} \Big|_{x_{3}=0,h} \\ -\mu \cos \alpha \frac{\partial u_{2}}{\partial x_{3}} \Big|_{x_{3}=0,h} \\ -\sin \alpha \mu \frac{\partial u_{2}}{\partial x_{3}} \Big|_{x_{3}=0,h} + p \cos \alpha \end{cases}$$

$$(II.58)$$

où α est l'angle d'incidence du patin

 α étant petit, nous pouvons écrire : $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx tg\alpha = \alpha$ avec $tg\alpha = \frac{\partial h}{\partial x}$

Par conséquent, les composantes de la résultante \vec{R} se réduisent à :

$$\vec{R} = \iint_{\Omega} \left\{ -\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0,h} \right\} d\Omega$$

$$p$$
(II.59)

La première et la deuxième composante du vecteur \vec{R} représentent les forces de frottement F_1 et F_2 exercées par le fluide sur les parois selon x_1 et x_2 tandis que la troisième composante $\iint_{\Omega} pd\Omega$ représente la portance hydrodynamique du contact notée W.

Pour le contact schématisé sur la figure II.10, le nombre de frottement se calcule par :

$$C_f = \frac{|F_1|}{W} \tag{II.60}$$

II.5.3. Vitesses moyennes de l'écoulement et débit de fuite

Pour le contact représenté sur la figure (II.11), les vitesses moyennes de l'écoulement se calculent par :

$$\begin{cases}
\overline{u}_{1}(x_{1}, x_{2}) = \frac{1}{h} \int_{0}^{h} u_{1}(x_{1}, x_{2}, x_{3}) dx_{3} = \frac{1}{h} \int_{0}^{h} \left\{ \frac{h - x_{3}}{h} U_{11} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_{1}} \left[x_{3}^{2} - x_{3} h \right] \right\} dx_{3} \\
\overline{u}_{2}(x_{1}, x_{2}) = \frac{1}{h} \int_{0}^{h} u_{2}(x_{1}, x_{2}, x_{3}) dx_{3} = \frac{1}{h} \int_{0}^{h} \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_{2}} \left[x_{3}^{2} - x_{3} h \right] dx_{3}
\end{cases} \tag{II.61}$$

avec $U_{11} = U$ et $U_{12} = 0$

Après intégration :

$$\begin{cases}
\overline{u}_1 = \frac{U}{2} - \frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\
\overline{u}_2 = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2}
\end{cases}$$
(II.62)

Les débits de fuite suivant x_1 et x_2 se calculent par intégration du champ de vitesses de l'écoulement u_1 et u_2 (figure II.11) :

$$Q_1 = \iint_{S \perp x_1} u_1 dS \tag{II.63}$$

$$Q_2 = \iint_{S \perp x_2} u_2 dS \tag{II.64}$$

Les expressions de u_1 et u_2 sont données par les équations (II.45). Les débits selon x_1 et x_2

peuvent aussi être calculés en utilisant les expressions des vitesses moyennes (II.61) :

$$Q_1 = \int_0^B \overline{u}_1 h dx_2 \tag{II.65}$$

De même:

$$Q_{2} = \int_{0}^{L} \overline{u}_{2} h dx_{1}$$

$$D\'{e}bit de fuite Q_{B}$$

$$X_{2} \qquad D\'{e}bit de fuite Q_{o}$$

$$D\'{e}bit de fuite Q_{o}$$

Fig. II.11 Débit de fuite dans une butée cylindrique.

II.5.4 Puissance dissipée

L'intégration de la fonction de dissipation visqueuse Φ sur le volume occupé par le fluide en écoulement permet de calculer la puissance dissipée due au cisaillement du fluide :

$$P = \iiint_{V} \Phi dV = \int_{0}^{h} \int_{0}^{B} \int_{0}^{L} \Phi dx_{1} dx_{2} dx_{3}$$
 (II.67)

où Φ est définie par l'équation (II.24).

Après intégration à travers l'épaisseur du film, la puissance dissipée s'écrit :

$$P = \int_{0}^{B} \int_{0}^{L} \left\{ \mu \frac{U^{2}}{h} + \frac{h^{3}}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_{1}} \right)^{2} + \left(\frac{\partial p}{\partial x_{2}} \right)^{2} \right] \right\} dx_{1} dx_{2}$$
(II.68)

II.6 Conclusion

La théorie de la lubrification hydrodynamique pour un fluide newtonien en écoulement laminaire a été présentée en détails. Les différentes équations décrivant cette théorie vont être utilisées au cours de notre étude pour déterminer les caractéristiques d'écoulement de films minces entre parois mobiles. L'intégration de l'équation de la mécanique des films minces visqueux permet de calculer la répartition de la pression qui existe en tout point du fluide. Un certain nombre de caractéristiques telles que la portance hydrodynamique, le débit de fuite, la force de frottement et la puissance dissipée dans le contact s'en déduisent aisément. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons plus particulièrement à l'équation de Reynolds (II.51) écrite en régime permanent pour étudier le comportement statique du patin incliné rugueux utilisant un fluide newtonien comme lubrifiant. Dans le prochain chapitre, nous appliquons le processus d'homogénéisation à cette équation en vue de prendre en considération la géométrie locale du patin ; c'est-à-dire la microtopographie de la surface stationnaire.

CHAPITRE III

Homogénéisation de l'équation de Reynolds newtonienne : Application à l'étude du patin incliné rugueux en régime laminaire

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons la technique d'homogénéisation pour l'analyse théorique du problème de lubrification hydrodynamique dans les contacts rugueux lubrifiés par des fluides newtoniens. Nous supposons, par hypothèse, que la surface stationnaire du contact est rugueuse tandis que la surface mobile est parfaitement lisse. Cette hypothèse nous permettra d'utiliser l'équation de Reynolds dérivée dans le chapitre précédent sans la prise en considération du terme transitoire figurant dans le second membre de l'équation. Pour pouvoir appliquer cette technique, nous supposerons d'autre part que la distribution des rugosités est périodique sur toute la surface du contact. Nous montrerons que le processus d'homogénéisation de l'équation de Reynolds conduit à la résolution par la méthode des différences finies de deux problèmes, à savoir :

- un problème local gouverné par trois équations aux dérivées partielles du second ordre dont les inconnues sont des fonctions périodiques locales ;
- un problème global régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée supposée nulle sur la frontière du domaine d'intégration.

La validation de la technique d'homogénéisation sera effectuée en comparant les résultats obtenus à partir de cette technique avec ceux issus de l'application de la méthode déterministe classique dans le cas d'un patin incliné de Mitchell (blochet) en considérant quatre formes de rugosités : transversales, longitudinales, isotropes et anisotropes. Ce patin, qui peut être fixe ou oscillant, fait partie d'une butée hydrodynamique ou palier axial utilisé pour encaisser les charges axiales appliquées sur les lignes d'arbre de machines tournantes.

III.2 Application de la méthode déterministe (directe) à la résolution de l'équation de Reynolds

L'approche déterministe ou directe consiste à résoudre directement l'équation de Reynolds dans le cas des écoulements de films très minces entre parois rugueuses. Dans cette approche, qui nécessite des maillages très fins du film, la rugosité de surface est prise en compte dans l'équation géométrique du film.

III.2.1 Equation de Reynolds en régime stationnaire et équation géométrique du film

Dans cette approche, il convient d'écrire l'équation de Reynolds (II.51) sous la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla} p_{\varepsilon} \right) = 6 \mu \vec{\nabla} \bullet \left(h_{\varepsilon} \vec{U} \right) \text{ sur } D = (0, L) \times (0, B)$$
(III.1)

ou encore:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_{1}} : \frac{\partial}{\partial x_{2}} \right\rangle \begin{cases} h_{\varepsilon}^{3} & \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_{1}} \\ h_{\varepsilon}^{3} & \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_{2}} \end{cases} = 6\mu \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{1}} : \frac{\partial}{\partial x_{2}} \right\rangle \begin{cases} h_{\varepsilon} \left(U_{11} + U_{21} \right) \\ h_{\varepsilon} \left(U_{12} + U_{22} \right) \end{cases}$$
(III.2)

0ù:

$$h_{\varepsilon}(x_1, x_2) = h_0(x_1, x_2) + h_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$
(III.3)

La pression déterministe $\,p_{\scriptscriptstyle E}\,$ doit satisfaire à l'équation (III.1) et à la condition de Dirichlet suivante :

$$p_{\varepsilon} = 0 \text{ sur la frontière } (\partial D)$$
 (III.4)

Dans l'équation (III.3), h_0 est l'épaisseur nominale du film définie comme la distance entre la surface mobile et le niveau moyen de la surface stationnaire tandis que h_1 représente l'amplitude des rugosités mesurée par rapport au niveau moyen de la surface stationnaire.

III.2.2 Application au patin incliné de Mitchell (3D)

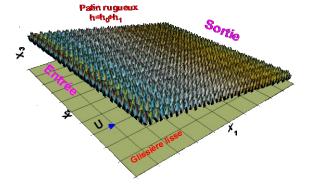
La figure III.1 représente schématiquement un patin incliné de Mitchell de dimension finie (3D) où seule la surface du patin fixe contiguë au film est rugueuse. La glissière supposée lisse se déplace suivant la direction ox_1 avec une vitesse uniforme $\vec{U} = U\vec{e}_1$. Dans ces conditions les équations (III.1) et(III.3) prennent la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla} p_{\varepsilon} \right) = \Lambda \frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_{1}} \tag{III.5}$$

où

$$h_{\varepsilon}\left(x_{1,}x_{2}\right) = \underbrace{\left(h_{\min} - h_{\max}\right)\frac{x_{1}}{L} + h_{\max}}_{h_{0}} + h_{1}\left(\frac{x_{1}}{\varepsilon}, \frac{x_{2}}{\varepsilon}\right) \quad \text{tel que } 0 \leq x_{1} \leq L$$
(III.6)

Fig. III.1 Schéma du patin incliné rugueux.



Dans l'équation (III.6), h_1 est une fonction périodique qui peut prendre selon la forme des rugosités figure III.2. Les expressions mathématiques et les caractéristiques indiquées dans le tableau III.1.

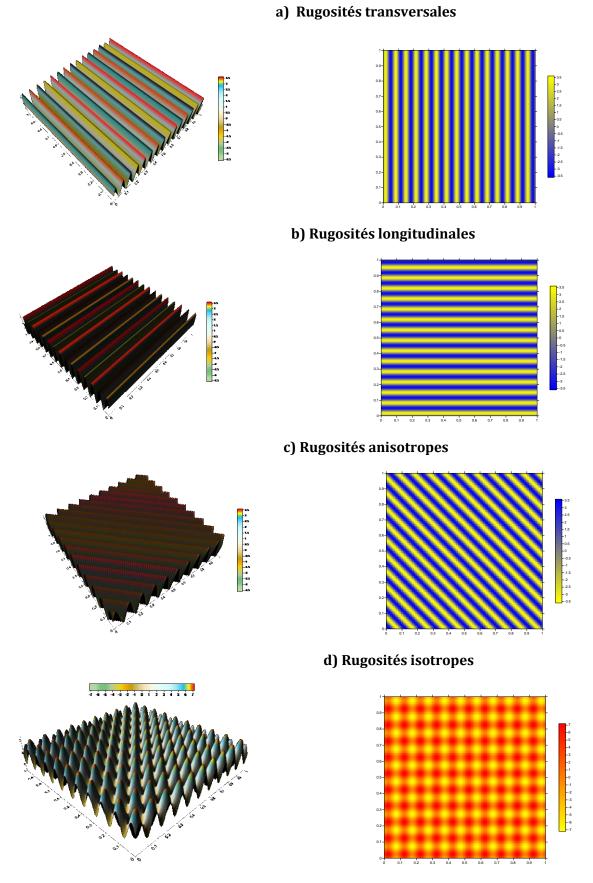


Fig. III.2 Formes de rugosités étudiées

Tableau III.1 : Expressions mathématiques des différentes formes de rugosités en coordonnées globales

Types de rugosités	Expressions de $ extit{h}_1$	$RMS = \sqrt{\frac{1}{LB} \int_{0}^{B} \int_{0}^{L} h_{1}^{2}(x_{1}, x_{2}) dx_{1} dx_{2}}$
Rugosités transversales	$h_1 = \alpha \sin\left(\frac{2\pi n_p x_1}{L}\right) = \alpha \sin\left(\frac{2\pi x_1}{\lambda_{x_1}}\right)$	
	où $\lambda_{x_1} = \frac{L}{n_p} = \varepsilon L$ et $\varepsilon = \frac{1}{n_p}$	$RMS = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$
Rugosités longitudinales	$h_1 = \alpha \sin\left(\frac{2\pi n_p x_2}{B}\right) = \alpha \sin\left(\frac{2\pi x_2}{\lambda_{x_2}}\right)$	
	où $\lambda_{x_2} = \frac{B}{n_p} = \varepsilon B$	$RMS = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$
Rugosités anisotropes	$h_1 = \alpha \sin \left(2\pi n_p \left(\frac{x_1}{L} + \frac{x_2}{B} \right) \right) = \alpha \sin \left(2\pi \left(\frac{x_1}{\lambda_{x_1}} + \frac{x_2}{\lambda_{x_2}} \right) \right)$	$RMS = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$
Rugosités isotropes	$h_{1} = \alpha \left(\sin \left(2\pi n_{p} \frac{x_{1}}{L} \right) + \sin \left(2\pi n_{p} \frac{x_{2}}{B} \right) \right) =$	$RMS = \alpha \sqrt{2}$
	$\alpha \left(\sin \left(2\pi \frac{x_1}{\varepsilon L} \right) + \sin \left(2\pi \frac{x_2}{\varepsilon B} \right) \right)$	

où : λ_{x_1} et λ_{x_2} sont respectivement les longueurs d'ondes des rugosités suivant x_1 et x_2 .

L'équation (III.5) dont l'inconnue est la pression déterministe p_{ε} n'admet pas de solution analytique, il est donc nécessaire d'utiliser les méthodes de résolution numérique. La discrétisation de l'équation (III.5) par la méthode des différences finies (figure III.3) conduit au système d'équations algébriques suivant :

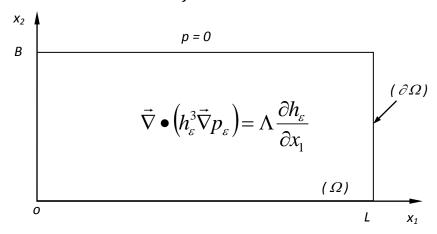
$$a_{ij}p_{\varepsilon_{i+1,j}} + b_{ij}p_{\varepsilon_{i-1,j}} + c_{ij}p_{\varepsilon_{i,j+1}} + d_{ij}p_{\varepsilon_{i,j+1}} - e_{ij}p_{\varepsilon_{ij}} = f_{ij}$$
(III.7)

où:

$$a_{ij} = \frac{h_{\varepsilon ij}^{3}}{\Delta x_{1}^{2}} + \frac{3}{2} \frac{h_{\varepsilon ij}^{2} \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_{1}}\right)_{ij}}{\Delta x_{1}}; \quad b_{ij} = \frac{h_{\varepsilon ij}^{3}}{\Delta x_{1}^{2}} - \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_{1}}\right)_{ij}}{\Delta x_{1}}; \quad c_{ij} = \frac{h_{\varepsilon ij}^{3}}{\Delta x_{2}^{2}} + \frac{3}{2} \frac{h_{\varepsilon ij}^{2} \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_{2}}\right)_{ij}}{\Delta x_{2}}; \quad d_{ij} = \frac{h_{\varepsilon ij}^{3}}{\Delta x_{2}^{2}} - \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_{2}}\right)_{ij}}{\Delta x_{2}}; \\ e_{ij} = 2h_{\varepsilon ij}^{3} \left(\frac{1}{\Delta x_{1}^{2}} + \frac{1}{\Delta x_{2}^{2}}\right); \quad f_{ij} = \Lambda \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_{1}}\right)_{ij}$$

 Δx_i étant respectivement les pas du maillage suivant les directions x_i .

a) Problème continu



b) Problème discret

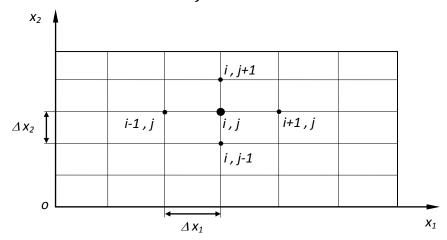


Fig. III.3 Discrétisation du film.

Le système d'équations (III.7) résultant de la discrétisation de l'équation de Reynolds (III.5) peut être résolu par la méthode itérative du gradient conjugué ou de la méthode des sur-relaxations successives (S.O.R) de Gauss-Seidel. Les algorithmes de ces deux méthodes itératives sont présentées en détails dans la référence [42].

L'application de la méthode de Gauss-Seidel nécessite la détermination par expérimentation numérique de la valeur optimale du coefficient de sur-relaxation α dont la valeur s'échelonne entre 1 et 2 afin d'accélérer la convergence du processus itératif. Il convient de souligner que la méthode de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation permet de prendre en considération numériquement les conditions de rupture du film de Reynolds dans la région à géométrie divergente de certains contacts hydrodynamiques cavitants telle que la butée symétrique présentée dans le chapitre précédent en figure II.9.

III.2.3 Application au cas du patin incliné (2D)

Lorsque la largeur de patin suivant x_2 est très grande devant sa longueur, l'écoulement du fluide s'effectue seulement suivant la longueur du patin car le gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x_2} \langle \langle \frac{\partial p}{\partial x_1} \rangle$ figure III.4. Dans ces conditions, l'équation de Reynolds (III.5) se réduit à :

$$\frac{d}{dx_1} \left(h_{\varepsilon}^3 (x_1) \frac{dp_{\varepsilon}}{dx_1} \right) = \Lambda \frac{dp_{\varepsilon}}{dx_1}$$
(III.8)

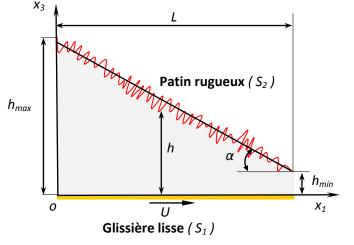
avec:

$$h_{\varepsilon} = h_0(x_1) + h_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \tag{III.9}$$

Les conditions limites associées à l'équation (III.8) sont :

$$p_{\varepsilon}(x_1 = 0) = p_{\varepsilon}(x_1 = L) = 0 \tag{III.10}$$

Fig. III.4 Schématisation d'un patin incliné plan.



Dans l'équation (III.9), les expressions de h_0 et h_1 sont données par :

$$h_0 = \left(h_{\min} - h_{\max}\right) \frac{x_1}{L} + h_{\max}$$

$$h_1 = \alpha \sin\left(\frac{2\pi n_p x_1}{L}\right) = \alpha \sin\left(\frac{2\pi x_1}{\lambda_{x_1}}\right)$$

 n_p et λ_{x_1} étant respectivement le nombre de périodes ou de rugosités et la longueur d'onde de la rugosité.

La discrétisation de l'équation (III.8) par la méthode des différences finies centrées conduit à la résolution du système algébrique suivant :

$$a_i p_{\varepsilon_{i+1,j}} + b_i p_{\varepsilon_{i-1,j}} - e_i p_{\varepsilon_i} = f_i$$
(III.11)

$$\text{avec } a_i = \frac{h_{\varepsilon i}^3}{\Delta x_1^2} + \frac{3}{2} \frac{h_{\varepsilon i}^2 \left(\frac{dh_{\varepsilon}}{\partial x_1}\right)_i}{\Delta x_1} \qquad b_i = \frac{h_{\varepsilon ij}^3}{\Delta x_1^2} - \frac{3}{2} \frac{h_{\varepsilon i}^2 \left(\frac{dh_{\varepsilon}}{\partial x_1}\right)_i}{\Delta x_1} \qquad e_i = \frac{2h_{\varepsilon i}^3}{\Delta x_1^2} \text{ et } f_i = \Lambda \left(\frac{dh_{\varepsilon}}{dx_1}\right)_i$$

La résolution du système d'équations (III.11) s'effectue à l'aide de méthodes itératives tels que la méthode de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation ou la méthode du gradient conjugué.

III.3 Application de la méthode d'homogénéisation.

Pour homogénéiser l'équation de Reynolds (III.5), nous introduisons le développement asymptotique multiéchelle de la pression :

$$p_{\varepsilon}(x_1, x_2, y_1, y_2) = p_0(x_1, x_2) + \varepsilon p_1(x_1, x_2, y_1, y_2) + \varepsilon^2 p_2(x_1, x_2, y_1, y_2) + \dots$$
(III.12)

où p_0 est la pression homogénéisée dépendant des variables globales $(x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$

et p_1 et p_2 sont des fonctions périodiques par rapport aux variables locales $(y_1, y_2) = (x_1/\varepsilon, x_2/\varepsilon)$

tel que $(y_1, y_2) \in Y = (0,1) \times (0,1)$ qui est la cellule unitaire.

Dans ce qui suit, nous utiliserons la règle de différentiation suivante :

$$\vec{\nabla}(\circ) = \vec{\nabla}_{x}(\circ) + \varepsilon^{-1} \vec{\nabla}_{y}(\circ) \tag{III.13}$$

avec
$$\vec{\nabla}_x(\circ) = \frac{\partial(\circ)}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial(\circ)}{\partial x_2}\vec{e}_2$$
 et $\vec{\nabla}_y(\circ) = \frac{\partial(\circ)}{\partial y_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial(\circ)}{\partial y_2}\vec{e}_2$

 $\vec{\nabla}_x(\circ)$ et $\vec{\nabla}_y(\circ)$ regroupent respectivement les opérateurs différentiels par rapport aux variables globales (x_1,x_2) et variables locales (y_1,y_2) .

En notation indicielle, l'équation (III.13) s'écrit : $\frac{\partial(\circ)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\circ)}{\partial x_i} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial(\circ)}{\partial y_i}$; i = 1,2

En limitant le développement de la pression p_{ε} à l'ordre 1, l'équation de Reynolds (III.5) prend la forme suivante :

$$\vec{\nabla}_{x} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{0}\right) + \vec{\nabla}_{x} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{y} p_{1}\right) + \vec{\nabla}_{y} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{1}\right) + \\
\varepsilon \vec{\nabla}_{x} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{1}\right) + \varepsilon^{-1} \left[\vec{\nabla}_{y} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{0}\right) + \vec{\nabla}_{y} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{y} p_{1}\right)\right] = 6\mu \vec{\nabla}_{x} \bullet \left(h_{\varepsilon} \vec{U}\right) + 6\mu \varepsilon^{-1} \vec{\nabla}_{y} \bullet \left(h_{\varepsilon} \vec{U}\right)$$
(III.14)

Après identification par rapport à $\, arepsilon^{\, j} \,$ (j=-1 , 0 , 1), nous trouvons les équations suivantes :

- termes en ε^{-1} :

$$\vec{\nabla}_{v} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{v} p_{1} \right) = 6 \mu \vec{\nabla}_{v} \bullet \left(h_{\varepsilon} \vec{U} \right) - \vec{\nabla}_{v} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{0} \right) \tag{III.15}$$

- termes en ε^0 :

$$\vec{\nabla}_{x} \bullet \left[h_{\varepsilon}^{3} \left(\vec{\nabla}_{x} p_{0} + \vec{\nabla}_{y} p_{1} \right) \right] = 6 \mu \vec{\nabla}_{x} \bullet \left(h_{\varepsilon} \vec{U} \right) - \vec{\nabla}_{y} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right)$$
(III.16)

- termes en ε^1 .

$$\vec{\nabla}_{x} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) = 0 \tag{III.17}$$

Si $\vec{U} = U \vec{e}_1$, les équations (III.15) et (III.16) s'écrivent :

$$\vec{\nabla}_{y} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{y} p_{1} \right) = \Lambda \frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_{1}} - \vec{\nabla}_{y} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{0} \right)$$
(III.18)

$$\vec{\nabla}_{x} \bullet \left[h_{\varepsilon}^{3} \left(\vec{\nabla}_{x} p_{0} + \vec{\nabla}_{y} p_{1} \right) \right] = \Lambda \frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_{1}} - \vec{\nabla}_{y} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right)$$
(III.19)

Pour découpler les équations (III.17), (III.18) et (III.19), nous posons [43] :

$$p_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = v_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + v_2(x_1, x_2, y_1, y_2) \frac{\partial p_0}{\partial x_2} + v_3(x_1, x_2, y_1, y_2)$$
(III.20)

 v_1, v_2 et v_3 sont des fonctions périodiques.

En remplaçant l'équation (III.20) dans l'équation (III.18), nous obtenons :

$$\vec{\nabla}_{y} \bullet \left[h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{y} \left(v_{1} \frac{\partial p_{0}}{\partial x_{1}} + v_{2} \frac{\partial p_{0}}{\partial x_{2}} + v_{3} \right) \right] = \Lambda \frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_{1}} - \vec{\nabla}_{y} \bullet \left[h_{\varepsilon}^{3} \left(\frac{\partial p_{0}}{\partial x_{1}} \vec{e}_{1} + \frac{\partial p_{0}}{\partial x_{2}} \vec{e}_{2} \right) \right]$$

Par identification, nous trouvons les équations différentielles suivantes :

$$\vec{\nabla}_{v} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{v} v_{1} \right) = -\vec{\nabla}_{v} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{e}_{1} \right)$$

$$\vec{\nabla}_{v} \bullet (h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{v} v_{2}) = -\vec{\nabla}_{v} \bullet (h_{\varepsilon}^{3} \vec{e}_{2})$$

$$\vec{\nabla}_{y} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{y} v_{3} \right) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_{1}}$$

ou encore :

$$\vec{\nabla}_{y} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{y} v_{1} \right) = -\frac{\partial h_{\varepsilon}^{3}}{\partial v_{1}} \tag{III.21}$$

$$\vec{\nabla}_{y} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{y} v_{2} \right) = -\frac{\partial h_{\varepsilon}^{3}}{\partial v_{2}} \tag{III.22}$$

$$\vec{\nabla}_{y} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{y} v_{3}\right) = \Lambda \frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_{1}}$$
(III.23)

où: $h(x_1, x_2, y_1, y_2) = h_0(x_1, x_2) + h_1(y_1, y_2)$. Les expressions mathématiques de h_1 en fonction des coordonnées locales sont données dans le tableau III.2.

Le domaine d'intégration des équations (III.21) à (III.23) est défini par la cellule unitaire $Y = (0,1) \times (0,1)$.

L'intégration de l'équation(III.19) sur la cellule Y conduit à :

$$\int_{Y} \vec{\nabla}_{y} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \vec{\nabla}_{x} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{y} p_{1} \right) + \vec{\nabla}_{x} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{0} \right) - \Lambda \frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_{1}} dY = 0$$
(III.24)

Tableau III. 2 Expressions mathématiques de h_1 en fonction des coordonnées locales.

Types de rugosités	Expressions de $h_{_{\! 1}}$	$RMS = \sqrt{\frac{1}{LB} \int_{0}^{B} \int_{0}^{L} h_{1}^{2}(x_{1}, x_{2}) dx_{1} dx_{2}}$
Rugosités transversales	$h_1 = \alpha \sin(2\pi y_1)$	$RMS = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$
Rugosités longitudinales	$h_1 = \alpha \sin(2\pi y_2)$	$RMS = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$
Rugosités anisotropes	$h_1 = \alpha \sin(2\pi(y_1 + y_2))$	$RMS = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$
Rugosités isotropes	$h_1 = \alpha(\sin(2\pi y_1) + \sin(2\pi y_2))$	$RMS = \alpha \sqrt{2}$

Puisque $h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{1}$ est périodique, nous pouvons écrire : $\int_{V} \vec{\nabla}_{y} \bullet (h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{1}) dY = 0$.

L'équation (III.24) se réduit à :

$$\int_{Y} \left(\vec{\nabla}_{x} \bullet \left[h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{y} \left(\frac{\partial p_{0}}{\partial x_{1}} v_{1} + \frac{\partial p_{0}}{\partial x_{2}} v_{2} + v_{3} \right) \right] + \vec{\nabla}_{x} \bullet \left(h_{\varepsilon}^{3} \vec{\nabla}_{x} p_{0} \right) - \Lambda \frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_{1}} \right) dY = 0$$
(III.25)

L'équation (III.24) peut s'écrire aussi :

$$\vec{\nabla}_x \bullet \left[\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \int_Y \left(h_{\varepsilon}^3 \vec{\nabla}_y v_1 + h_{\varepsilon}^3 \vec{e}_1 \right) dY + \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \int_Y \left(h_{\varepsilon}^3 \vec{\nabla}_y v_2 + h_{\varepsilon}^3 \vec{e}_2 \right) dY \right] =$$

$$\vec{\nabla}_{x} \bullet \int_{Y} \left\{ \begin{cases} \Lambda h_{\varepsilon} \\ 0 \end{cases} \right\} - \begin{cases} h_{\varepsilon}^{3} \frac{\partial v_{3}}{\partial y_{1}} \\ h_{\varepsilon}^{3} \frac{\partial v_{3}}{\partial y_{2}} \end{cases} dY$$
(III.26)

Soit par conséquent :

$$\vec{\nabla}_{x} \bullet (A(x)\vec{\nabla}_{x} p_{0}) = \vec{\nabla}_{x} \bullet \theta(x) \text{ sur } (D)$$
(III.27)

avec
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(x_1, x_2) & a_{12}(x_1, x_2) \\ a_{21}(x_1, x_2) & a_{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$
 et $\mathbf{\theta} = \begin{cases} \theta_1(x_1, x_2) \\ \theta_2(x_1, x_2) \end{cases}$

Les coefficients a_{ij} et θ_i sont définis par :

$$a_{11} = \int_{Y} h_{\varepsilon}^{3} \left(1 + \frac{\partial v_{1}}{\partial y_{1}} \right) dY \; ; \; a_{12} = \int_{Y} h_{\varepsilon}^{3} \frac{\partial v_{2}}{\partial y_{1}} dY \; ; \; a_{21} = \int_{Y} h_{\varepsilon}^{3} \frac{\partial v_{1}}{\partial y_{2}} dY \; ; \; a_{22} = \int_{Y} h_{\varepsilon}^{3} \left(1 + \frac{\partial v_{2}}{\partial y_{2}} \right) dY$$

$$\theta_{1} = \int_{Y} \left(\Lambda h_{\varepsilon} - h_{\varepsilon}^{3} \frac{\partial v_{3}}{\partial y_{2}} \right) dY \; ; \quad \theta_{2} = -\int_{Z} h_{\varepsilon}^{3} \frac{\partial v_{3}}{\partial y_{2}} dY$$
(III.28)

L'équation (III.27) peut aussi s'écrire sous la forme développée comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_{11} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_{21} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \right) = -\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right) sur(D)$$
(III.29)

La pression homogénéisée p_0 doit satisfaire à l'équation (III.27) ou (III.29) ainsi qu'à la condition de Dirichlet :

$$p_0 = 0$$
 sur la frontière ∂D (III.30)

Dans le cas lisse, c'est-à-dire : $h(x) = h_0(x)$ l'équation (III.27) se réduit à l'équation de Reynolds classique, i.e. :

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (h_0(x)) - \vec{\nabla}_x \bullet (h_0^3(x) \vec{\nabla}_x p_0) = 0$$
(III.31)

III.3.1. Solutions numériques des problèmes local et global

a) traitement numérique des équations locales.

La discrétisation par la méthode des différences finies centrées des équations locales (III.21) à (III.23) sur la cellule unitaire Y figure III.5 conduit au système d'équations suivant :

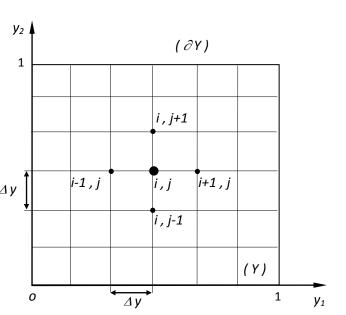
$$\begin{cases} v_{ij}^{(1)} = \alpha_{ij} v_{i+1,j}^{(1)} + \beta_{ij} v_{i-1,j}^{(1)} + \gamma_{ij} v_{i,j+1}^{(1)} + \delta_{ij} v_{i,j-1}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(1)} \\ v_{ij}^{(2)} = \alpha_{ij} v_{i+1,j}^{(2)} + \beta_{ij} v_{i-1,j}^{(2)} + \gamma_{ij} v_{i,j+1}^{(2)} + \delta_{ij} v_{i,j-1}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \\ v_{ij}^{(3)} = \alpha_{ij} v_{i+1,j}^{(3)} + \beta_{ij} v_{i-1,j}^{(3)} + \gamma_{ij} v_{i,j+1}^{(3)} + \delta_{ij} v_{i,j-1}^{(3)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} \end{cases}$$
(III.32)

En utilisant l'algorithme de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation $\,lpha_{\scriptscriptstyle GS}\,$,

le système (III.31) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \left(v_{i,j}^{(1)} \right)^{(k+1)} = \left(1 - \alpha_{GS} \right) \left(v_{i,j}^{(1)} \right)^{(k+1)} + \alpha_{GS} \left[\alpha_{ij} \left(v_{i+1,j}^{(1)} \right)^{(k)} + \beta_{ij} \left(v_{i-1,j}^{(1)} \right)^{(k+1)} + \gamma_{ij} \left(v_{i,j+1}^{(1)} \right)^{(k)} + \delta_{ij} \left(v_{i,j-1}^{(1)} \right)^{(k+1)} + \varepsilon_{ij}^{(1)} \right] \\ & \left(v_{i,j}^{(2)} \right)^{(k+1)} = \left(1 - \alpha_{GS} \right) \left(v_{i,j}^{(2)} \right)^{(k+1)} + \alpha_{GS} \left[\alpha_{ij} \left(v_{i+1,j}^{(2)} \right)^{(k)} + \beta_{ij} \left(v_{i-1,j}^{(2)} \right)^{(k+1)} + \gamma_{ij} \left(v_{i,j+1}^{(2)} \right)^{(k)} + \delta_{ij} \left(v_{i,j-1}^{(2)} \right)^{(k+1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \right] \\ & \left(v_{i,j}^{(3)} \right)^{(k+1)} = \left(1 - \alpha_{GS} \right) \left(v_{i,j}^{(31)} \right)^{(k+1)} + \alpha_{GS} \left[\alpha_{ij} \left(v_{i+1,j}^{(3)} \right)^{(k)} + \beta_{ij} \left(v_{i-1,j}^{(3)} \right)^{(k+1)} + \gamma_{ij} \left(v_{i,j+1}^{(3)} \right)^{(k)} + \delta_{ij} \left(v_{i,j-1}^{(3)} \right)^{(k+1)} + \varepsilon_{ij}^{(3)} \right] \end{aligned}$$

$$(III.33)$$



$$Y = (0,1) \times (0,1)$$

avec
$$\alpha_{ij} = \frac{\frac{h_{sij}^{3}}{\Delta y^{2}} + \frac{3}{2} \frac{h_{sij}^{2}}{\Delta y} \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_{1}}\right)_{ij}}{4h_{sij}^{3}}$$
; $\beta_{ij} = \frac{\frac{h_{sij}^{3}}{\Delta y^{2}} - \frac{3}{2} \frac{h_{sij}^{2}}{\Delta y} \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_{1}}\right)_{ij}}{4h_{sij}^{3}}$; $\gamma_{ij} = \frac{\frac{h_{sij}^{3}}{\Delta y^{2}} + \frac{3}{2} \frac{h_{sij}^{2}}{\Delta y} \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{4h_{sij}^{3}}$;

$$\delta_{ij} = \frac{\frac{h_{sij}^{3}}{\Delta y^{2}} - \frac{3}{2} \frac{h_{sij}^{2}}{\Delta y} \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{4h_{sij}^{3} / \Delta y^{2}}; \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{3\Lambda h_{sij}^{2} \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_{1}}\right)_{ij}}{4h_{sij}^{3} / \Delta y^{2}}; \quad \varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{3\Lambda h_{sij}^{2} \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{4h_{sij}^{3} / \Delta y^{2}}; \quad \varepsilon_{ij}^{(3)} = -\frac{\Lambda \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_{1}}\right)_{ij}}{4h_{sij}^{3} / \Delta y^{2}}$$

b) Traitement numérique de l'équation globale (homogénéisée)

L'application de la méthode des différences finies centrées à l'équation (III.29) conduit à l'équation discrétisée suivante :

$$p_{ij}^{(0)} = A_{ij} p_{i+1,j}^{(0)} + B_{ij} p_{i-1,j}^{(0)} + C_{ij} p_{i,j+1}^{(0)} + D_{ij} p_{i,j-1}^{(0)} + E_{ij} \left(p_{i+1,j+1}^{(0)} + p_{i-1,j-1}^{(0)} - p_{i+1,j-1}^{(0)} - p_{i-1,j+1}^{(0)} \right) + F_{ij}$$
(III.34)

avec

$$A_{ij} = \frac{\frac{a_{ij}^{11}}{(\Delta x_1)^2} + \frac{\left(\frac{\partial a^{11}}{\partial x_1}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial a^{21}}{\partial x_2}\right)_{ij}}{2\Delta x_1}}{2\left(\frac{a_{ij}^{11}}{\Delta x_1^2} + \frac{a_{ij}^{22}}{\Delta x_2^2}\right)} \quad ; \quad B_{ij} = \frac{\frac{a_{ij}^{11}}{(\Delta x_1)^2} - \frac{\left(\frac{\partial a^{11}}{\partial x_1}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial a^{21}}{\partial x_2}\right)_{ij}}{2\Delta x_1}}{2\left(\frac{a_{ij}^{11}}{\Delta x_1^2} + \frac{a_{ij}^{22}}{\Delta x_2^2}\right)}$$

$$C_{ij} = \frac{\frac{a_{ij}^{22}}{\left(\Delta x_{2}\right)^{2}} + \frac{\left(\frac{\partial a^{12}}{\partial x_{1}}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial a^{22}}{\partial x_{2}}\right)_{ij}}{2\Delta x_{2}} \qquad ; \quad D_{ij} = \frac{\frac{a_{ij}^{22}}{\left(\Delta x_{2}\right)^{2}} - \frac{\left(\frac{\partial a^{12}}{\partial x_{1}}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial a^{22}}{\partial x_{2}}\right)_{ij}}{2\Delta x_{2}}}{2\left(\frac{a_{ij}^{11}}{\Delta x_{1}^{2}} + \frac{a_{ij}^{22}}{\Delta x_{2}^{2}}\right)}$$

$$E_{ij} = \frac{\frac{a_{ij}^{12} + a_{ij}^{21}}{4\Delta x_1 \Delta x_2}}{2\left(\frac{a_{ij}^{11}}{\Delta x_1^2} + \frac{a_{ij}^{22}}{\Delta x_2^2}\right)} \quad \text{et} \quad F_{ij} = \frac{\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2}\right)_{ij}}{2\left(\frac{a_{ij}^{11}}{\Delta x_1^2} + \frac{a_{ij}^{22}}{\Delta x_2^2}\right)}$$

Le système (III.34) peut être résolu par la méthode (S.O.R).

III.3.2 Algorithme d'homogénéisation

L'algorithme ou le processus d'homogénéisation comprend les étapes suivantes :

Etape 1:

Résolution numérique du problème local gouverné par le système d'équation (III.21) à (III.23) dont les inconnues sont des fonctions périodiques $v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $v_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $v_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Etape2:

Calcul des coefficients des matrices A(x) et $\theta(x)$ définies par les expressions (III.28) à l'aide d'une intégration numérique.

Etape 3:

Résolution numérique du problème global régi par l'équation homogénéisée (III.27) ou (III.29) dont l'inconnue est la pression homogénéisée p_0 .

Il est utile de noter que les étapes 1 et 2 de l'algorithme d'homogénéisation s'appliquant à chaque point $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2 \rangle$ du domaine global $(D) = (0, L) \times (0, B)$.

Dans le cas (1D), les équations locales et globales se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(h_{\varepsilon}^{3} \frac{\partial v_{1}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \left(h_{\varepsilon}^{3} \right)}{\partial y} \tag{III.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(h_{\varepsilon}^{3} \frac{\partial v_{3}}{\partial y} \right) = \Lambda \frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y}$$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} - \frac{d}{dx} \left(A(x) \frac{dp_0}{dx} \right) = 0 \tag{III.36}$$

$$ou : \theta(x) = \int_{Y} \left(\Lambda h_{\varepsilon}(x, y) - h_{\varepsilon}^{3}(x, y) \frac{\partial v_{3}}{\partial y} \right) dy \quad ; \quad A(x) = \int_{Y} h_{\varepsilon}^{3}(x, y) \left(1 + \frac{\partial v_{1}}{\partial y} \right) dy$$

$$et(Y) = (0,1)$$

III.4 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées

Deux programmes de calcul ont été élaborés pour simuler le comportement du patin lubrifié à l'aide d'un fluide newtonien en se basant sur le concept des deux méthodes d'analyse tridimensionnelles développées. Les données de cette étude sont reportées dans le tableau III.3.

Les solutions déterministes et homogénéisées sont obtenues pour diverses valeurs de l'amplitude relative de rugosité $(\widetilde{\alpha}=0.0, 0.025, 0.25)$ et du paramètre ε qui correspond à l'inverse du nombre de périodes ou de rugosités dont les valeurs sont $n_p=5,10$ et 40. Notons que pour le cas d'un patin lisse, $\alpha=0$.

Tous les calculs sont effectués pour une valeur du rapport de l'épaisseur maximale du film à l'épaisseur minimale r=2

Les caractéristiques de maillages utilisés pour la discrétisation spatiale par la méthode des différences finies centrées des différentes équations aux dérivées partielles (III. 5), (III.21), (III.22), (III.23) et (III.29) sont indiquées dans le tableau III.4.

Tableau III. 3 Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement du patin

Paramètres	Symboles	Valeurs	Unités
Longueur du patin	L	0.10	m
Largeur du patin	В	0.10	m
Epaisseur minimale du film lubrifiant à la sortie du contact	$h_{ m min}$	4.×10 ⁻⁶	m
Epaisseur maximale du film lubrifiant à l'entrée du contact	$h_{ m max}$	8.×10 ⁻⁶	m
Amplitude des rugosités	α	0.0 (Cas lisse) $1.\times10^{-6}$	m
Ecart quadratique moyen des rugosités	RMS	$\frac{\sqrt{2}}{2} \times 10^{-6}$	m
Vitesse de déplacement de la glissière	U	1.	$m.s^{-1}$
Viscosité dynamique du fluide lubrifiant (Huile industrielle ISO VG 32)	μ	30.×10 ⁻³	Pa.s

Tableau III.4 Caractéristiques des maillages par différences finies.

diminution est plus rapide dans le cas des rugosités longitudinales.

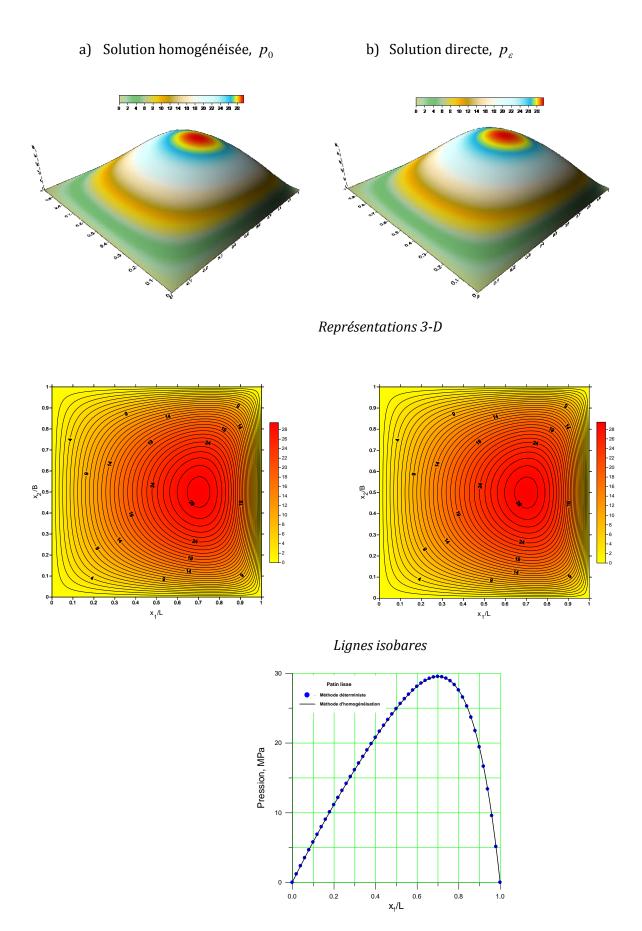
Méthodes d'analyse	EDPs gouvernant le problème	Nombre de mailles
Directe	Equation de Reynolds (Eq. III.5)	600×600
Homogénéisation	Equations locales (Eqs III.21 à III.23)	40×40
	Equation globale (Eq. III.29)	80×80

Les figures (III.6) et (III.7) ainsi que les tableaux III.6 à III.13 représentent les répartitions de pression hydrodynamique obtenues dans le cas du patin lisse et du patin rugueux. D'après ces illustrations, nous observons nettement que les solutions obtenues dans le cas lisse sont confondues ce qui permet de valider le programme de calcul basé sur l'homogénéisation de l'équation de Reynolds. Dans le cas rugueux, nous remarquons que la solution déterministe obtenue pour une amplitude de rugosité relativement faible converge vers la solution homogénéisée et ce pour les quatre formes de rugosités considérées. Cependant, la convergence de la solution déterministe ne peut être obtenue pour les formes de rugosités transversales et anisotropes que pour un nombre important de rugosités; c'est à dire lorsque $\varepsilon \to 0$. Il est à noter que les rugosités longitudinales n'ont pas d'effets sur la convergence de la solution déterministe vers la solution homogénéisée du fait que ces défauts sont orientés dans le même sens que celui de l'écoulement du lubrifiant comme l'illustre la figure (III.8).

La figure III.9 illustre clairement que lorsque le nombre de périodes ou de rugosités augmente l'écart relatif entre les portances hydrodynamiques déterministes et homogénéisées $\delta \tilde{W} = \int\limits_{\Omega} \left| p_0 - p_{\varepsilon} \right| dx_1 dx_2 / \int\limits_{\Omega} p_0 dx_1 dx_2 \ \text{diminue pour les quatre formes de rugosités considérées. Cette}$

Tableau III. 5 Comparaison en temps CPU des méthodes directe et d'homogénéisation (Processeur Intel Pentium 1.66 GHz, RAM 503 MB).

		Modèles de rugosités		
Méthodes d'analyse	Cas lisse	Transversales	Longitudinales	Anisotropes
	$(\widetilde{lpha}=0)$	$\left(arepsilon = lac{1}{40}, \widetilde{lpha} = rac{1}{4} ight)$	$\left(arepsilon=lag{1}{4}_{0},\widetilde{lpha}=lag{1}{4} ight)$	$\left(arepsilon=rac{1}{40},\widetilde{lpha}=rac{1}{4} ight)$
Directe	44.85 s	56.53 s	53.23 s	56.00 s
Homogénéisation	382.98 s	487.52 s	425.9 s	476.35 s



Répartition du champ de pression dans la section médiane du patin

Fig. III.6. Répartitions des pressions homogénéisée et directe dans le cas du patin lisse, $(\alpha=0.0,\,r=2)$

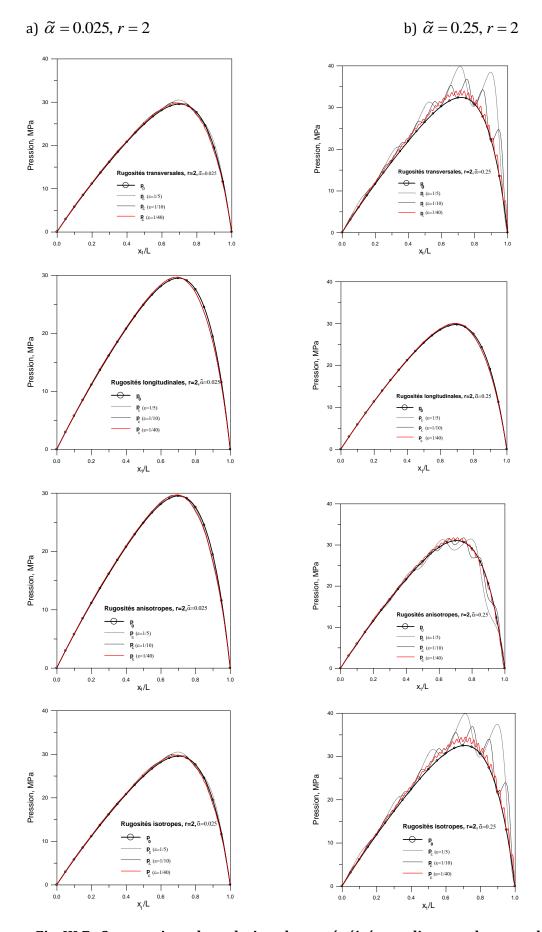


Fig. III.7 Comparaison des solutions homogénéisées et directes obtenues dans la section médiane du patin pour les différentes formes de rugosités (patin rugueux).

Tableau III.6 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité transversale, α/h_{min} =0.025

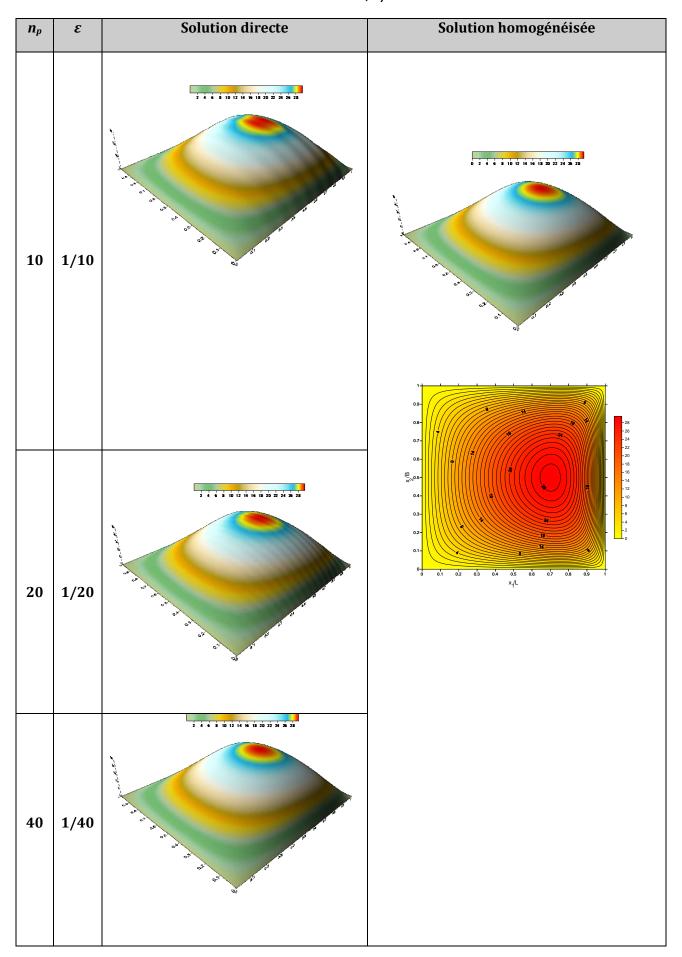


Tableau III.7 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité transversale, α/h_{min} =0.25

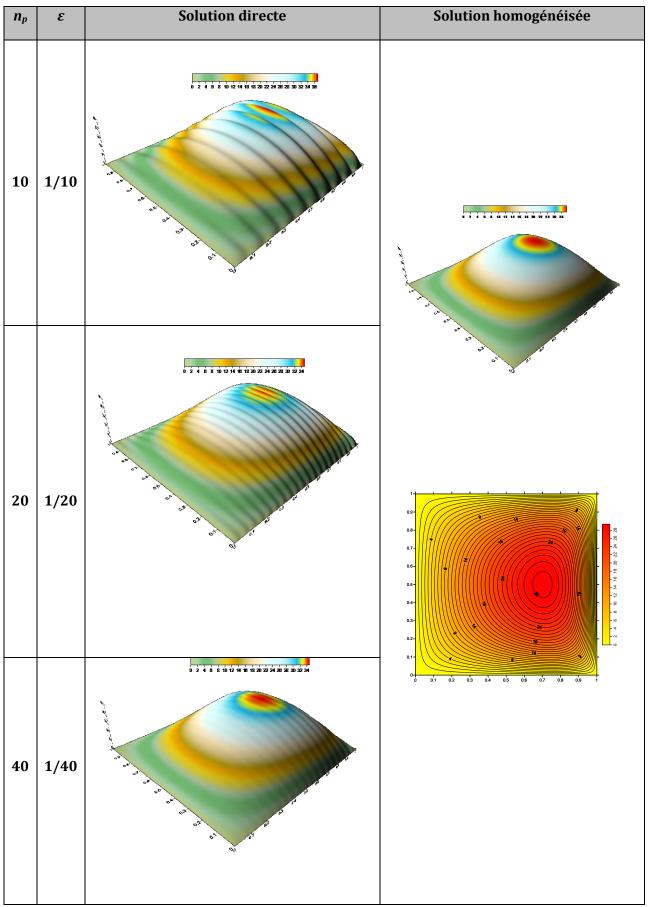


Tableau III.8 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité longitudinale, α/h_{min} =0.025

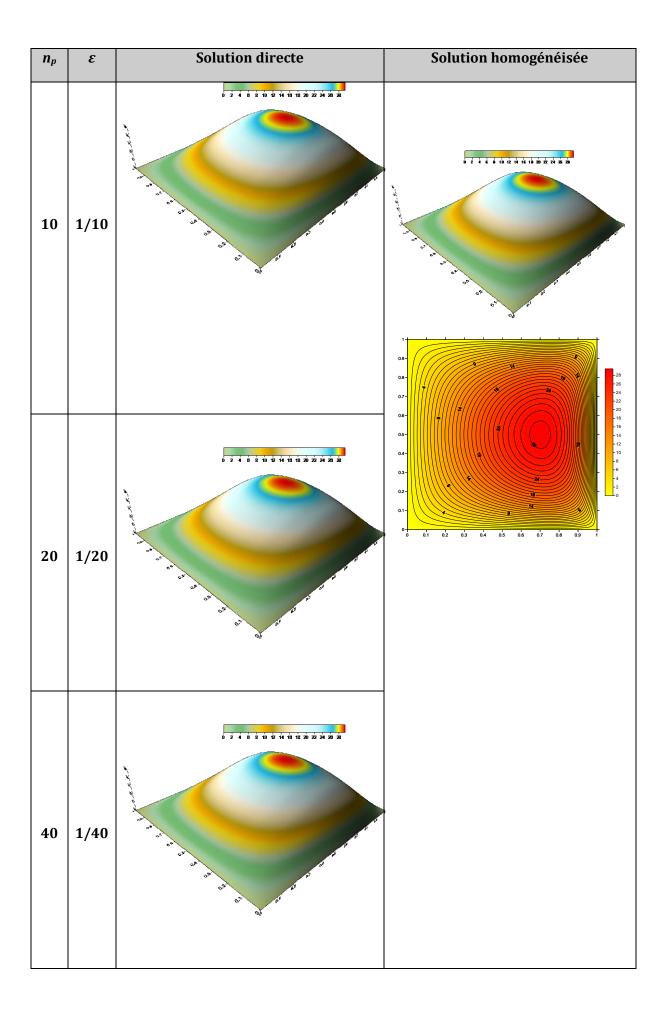


Tableau III.9 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité longitudinale, α/h_{min} =0.25

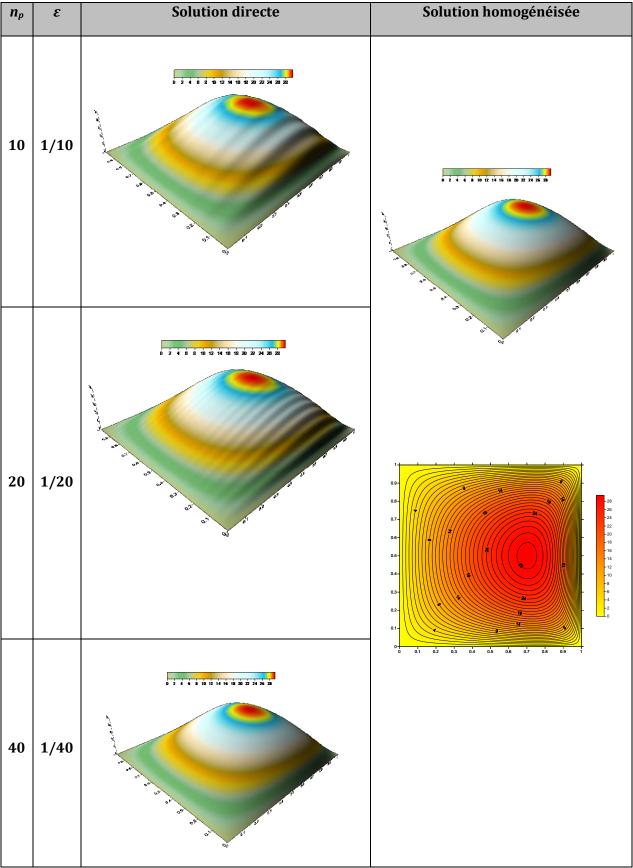


Tableau III.10 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité anisotrope, $\alpha/h_{min} = 0.025$

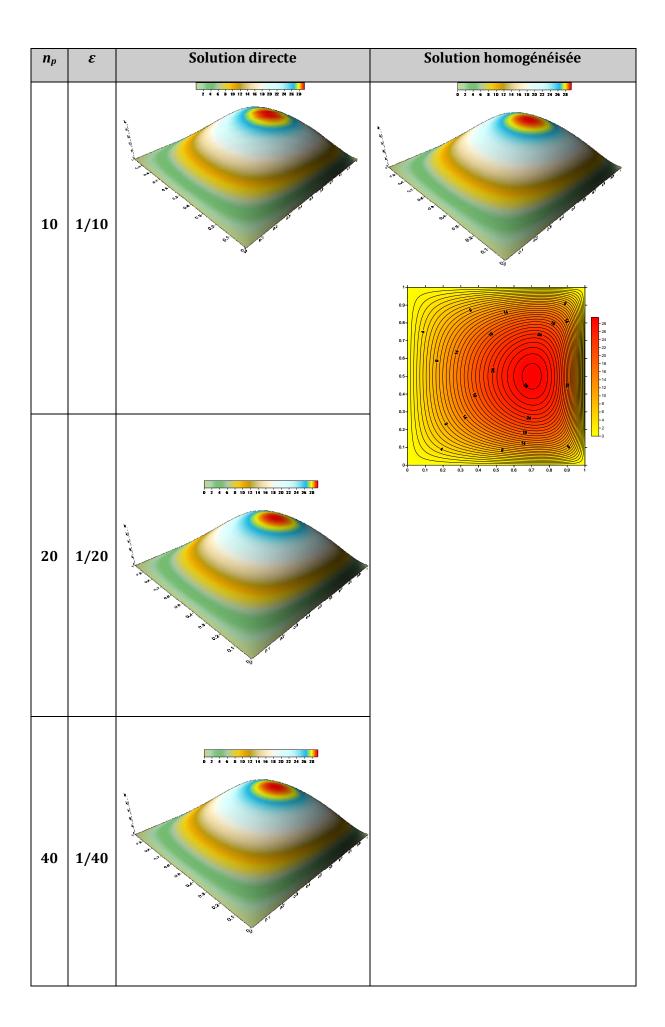


Tableau III. 11 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité anisotrope, α/h_{min} =0.25

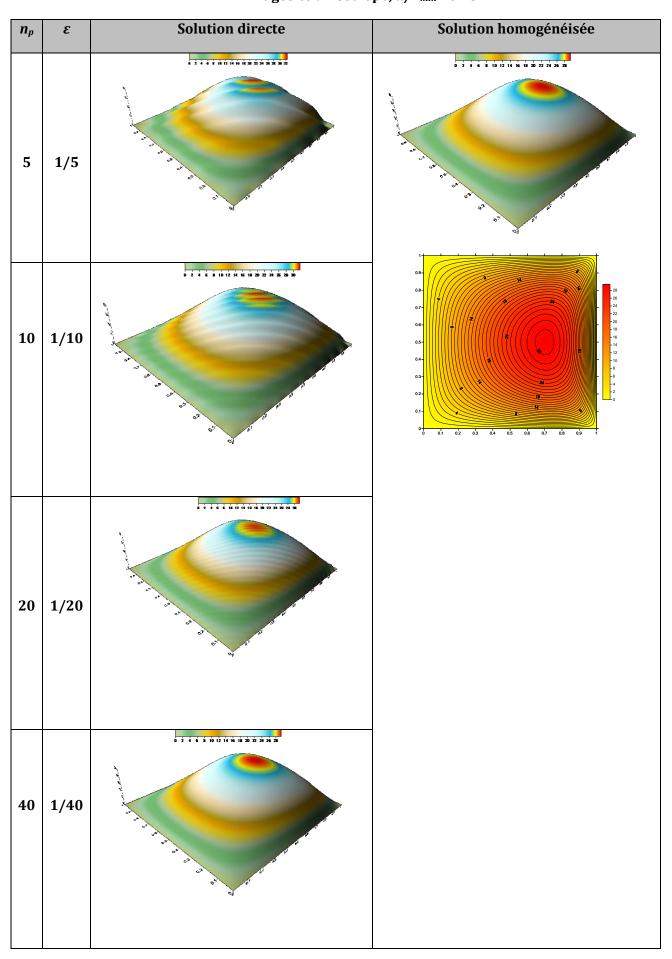


Tableau III.12 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité isotrope, $\alpha/h_{min} = 0.025$

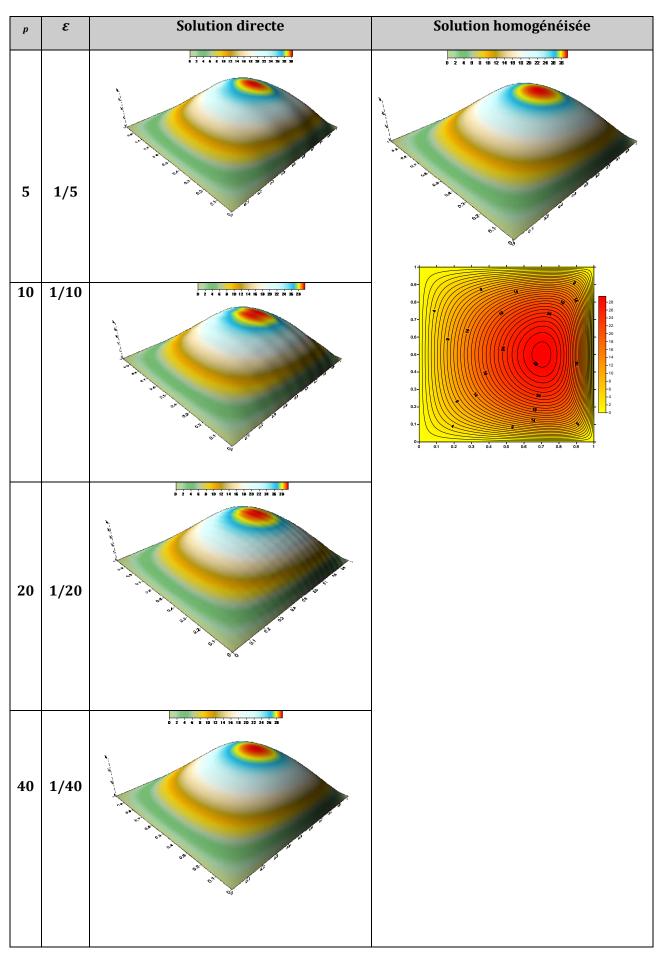
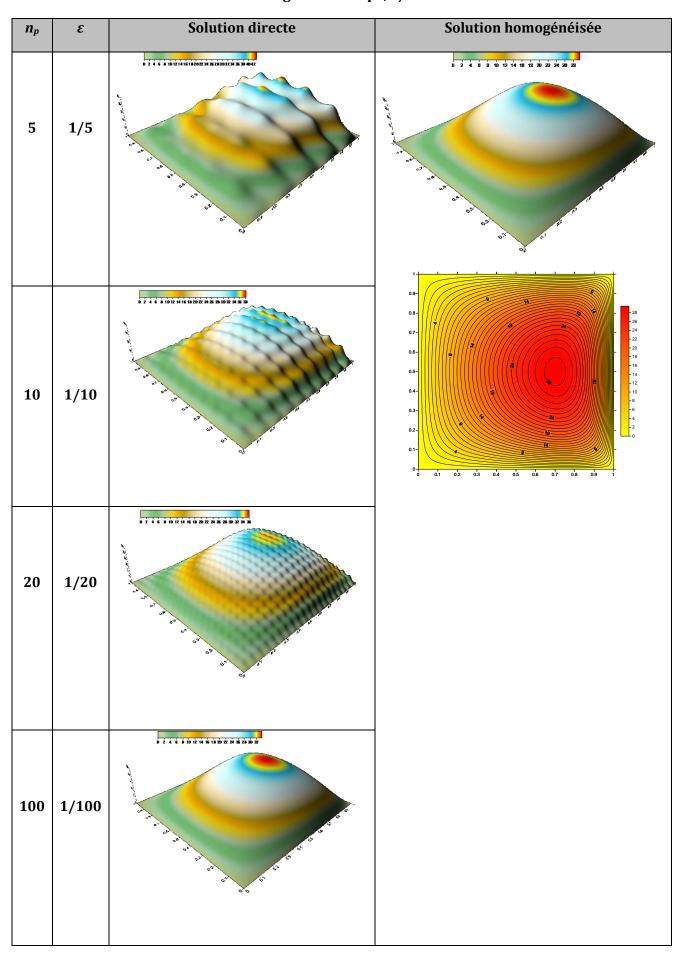


Tableau III. 13 Comparaison entre les solutions déterministes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité isotrope, $\alpha/h_{min}=0.25$



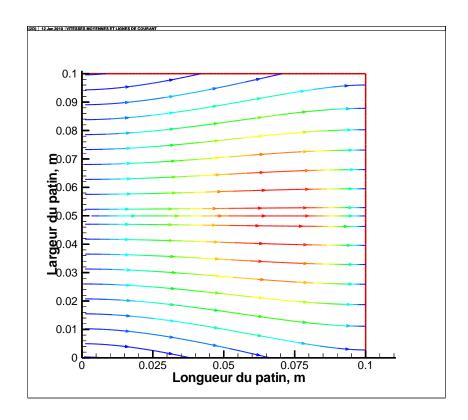


Fig. III.8 Représentation des lignes de courant de l'écoulement calculées par la technique d'homogénéisation dans le cas des rugosités longitudinales ($\tilde{\alpha}=0.25, r=2$)

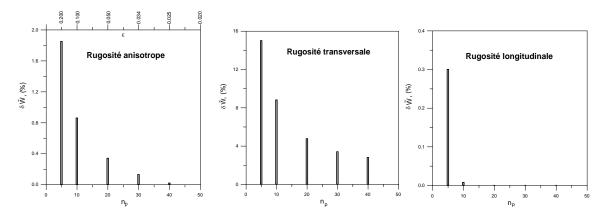


Fig. III.9 Evolutions de l'écart relatif entre les capacités de charges déterministes et homogénéisées en fonction du nombre de périodes.

Sur la base de ces résultats, nous pouvons conclure que pour des amplitudes de rugosités relativement faibles et un nombre important de rugosités, la technique d'homogénéisation, de mise en œuvre simple, est efficace du point de vue espace mémoire quelque soit la forme de rugosité considérée. Néanmoins, l'application de cette technique n'est possible que si la distribution des rugosités sur la surface de contact est périodique. Ces constatations sont en bonne concordance avec celles de [29].

Dans le tableau III. 5, nous comparons les temps CPU exprimés en secondes des calculs effectués pour la détermination des solutions déterministes et homogénéisées sur un PC doté d'un processeur de fréquence 1.66 GHz. Nous remarquons que le temps de calcul nécessaire pour la convergence de la solution homogénéisée est plus important que celui de la solution déterministe aussi bien dans le cas lisse que rugueux. Cela s'explique par

le fait que la résolution du problème homogénéisé nécessite le calcul de nombreuses intégrales et ce pour chaque point du domaine global. Une étude de sensibilité des maillages est alors nécessaire afin de déterminer les tailles optimales des différents maillages.

III.5 Conclusion

L'application du processus d'homogénéisation à l'équation de Reynolds incompressible et newtonienne par l'introduction d'un développement asymptotique multi-échelle de la pression a conduit à la résolution de deux problèmes : un problème local gouverné par trois équations aux dérivées partielles et un problème global régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée p_0 .

Nous avons ensuite étudié la convergence de la solution déterministe p_{ε} , obtenue par la résolution numérique directe de l'équation de Reynolds vers la solution homogénéisée p_0 pour les quatre formes de rugosités (transversales, longitudinales, isotropes et anisotropes). La comparaison des solutions obtenues en (2-D) et (3-D) par la méthode d'analyse déterministe (directe) et d'homogénéisation a permis d'affirmer que la méthode d'homogénéisation est efficace quelque soit la forme de rugosité. En effet, pour des amplitudes relativement faibles et un nombre important de rugosité, la solution déterministe p_{ε} tend vers la solution homogénéisée p_0 pour les quatre formes de rugosités. Toutefois, une étude de sensibilité du maillage est nécessaire afin de réduire le temps de calcul.

CHAPITRE IV

Théorie de la lubrification hydrodynamique par fluide non newtonien à couple de contraintes (fluide polaire)

IV.1 Introduction

Dans les études de simulation des problèmes de lubrification, nous supposons généralement que le comportement des fluides lubrifiants est newtonien. Néanmoins, les applications pratiques de la lubrification montrent que le modèle de fluide newtonien ne constitue pas une approche satisfaisante des problèmes de lubrification avec des huiles dopées ou additivées. Des études expérimentales ont montré que les huiles contenant des additifs de viscosité ont un comportement rhéologique non-newtonien, leur viscosité diminue quand le taux de cisaillement auquel elles sont soumises augmente. Ainsi, leur écoulement ne peut être décrit par la théorie des milieux continus classique qui néglige la taille des particules. Dans la littérature, il existe plusieurs théories permettant de décrire l'écoulement de ces fluides dits à rhéologie complexe. Parmi ces théories, la théorie des milieux continus de Vijay Kumar Stokes [30] est la plus simple et la plus utilisée car elle permet de tenir compte de la taille des particules en mouvement et des couples de volume et de contrainte dus à la présence des additifs. Dans la présente étude, le lubrifiant est assimilé à un fluide incompressible à couple de contrainte pour lequel seuls les moments de contrainte qui s'ajoutent au force de surface (forces de pression et de frottement visqueux) sont pris en considération. Le modèle de fluide à couple de contrainte a été largement utilisé pour l'étude de certains problèmes de la lubrification hydrodynamique, hydrostatique et thermo-hydrodynamique. Lin [31-33] a étudié les effets du paramètre du couple de contrainte $\tilde{\ell} = \ell / c$ sur les caractéristiques du film amortisseur d'un palier à arc partiel et d'un palier complet de longueur finie en appliquant la théorie des milieux continus de V. K. Stokes. Les résultats théoriques obtenus montrent que la présence des couples de contrainte permet d'avoir une amélioration de la capacité de charge du palier. Oliver [34] a montré expérimentalement que la présence de polymères dissous dans les lubrifiants entraîne une augmentation de la capacité de charge du film lubrifiant et une diminution du coefficient de frottement. Dans une autre étude, Mokhiamar et al. [35] ont étudié l'effet du paramètre du couple de contrainte sur les caractéristiques statiques d'un palier lisse en considérant l'élasticité du revêtement de surface. Ils ont montré qu'une augmentation du paramètre de couple de contrainte entraîne :

-une augmentation du pic de pression et de la portance du palier, celle-ci est plus importante à forte excentricité;

-une diminution de l'angle de calage et du coefficient de frottement.

Ils montrent par ailleurs que le débit de fuite n'est pas influencé, sauf pour les grandes valeurs du coefficient d'élasticité ; c'est-à-dire dans le cas de revêtement caractérisés par de faibles valeurs du module d'élasticité. Les

mêmes constations ont également été faites plus récemment par Lahmar [36] dans le cas d'un palier lisse bicouche.

Lin [37] a étudié l'influence du paramètre du couple de contrainte sur la stabilité linéaire d'un palier lisse rigide. Il a montré que le système lubrifié par un fluide à couple de contrainte est plus stable que celui lubrifié par un fluide newtonien. Il convient de noter que toutes les études précédentes ont été effectuées en régime de lubrification isotherme, i.e. la température est supposée constante dans les deux milieux fluide et solide. Wang et al [38] ont utilisé une approche thermo-hydrodynamique pour étudier le comportement d'un palier lisse soumis à une charge statique lubrifié par un fluide à couple de contrainte. Ils ont conclu que la température du palier calculée dans le cas du fluide à couple de contrainte est plus faible que celle obtenue pour un fluide newtonien (non polaire). Dans un autre travail, les mêmes auteurs ont utilisé le même modèle de fluide pour étudier le comportement dynamique du palier de tête de bielle d'un moteur à combustion interne [39].

et à l'étude des écoulements de films minces entre parois fixes ou mobiles a permis de dériver une équation aux dérivées partielles linéaire de type elliptique appelée équation de Reynolds modifiée.

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus de V. K. Stokes, puis nous dérivons moyennant les hypothèses de la lubrification par films minces les équations de base de la lubrification hydrodynamique par fluide polaire qui prennent en considération les couples de contraintes dus à la présence des additifs dans le lubrifiant.

IV.2 Bilan des efforts agissant sur un élément de fluide polaire

Considérons un volume matériel (B_0) délimité par la surface extérieure $(S_0 \equiv \partial B_0)$ figure IV.1. Imaginons une portion (B_1) qui est séparée du reste du volume (B_0) par la surface $(S_1 \equiv \partial B_1)$.

Selon le principe de contrainte d'Euler et de Cauchy, l'action de la portion du volume $(B_0 - B_1)$ sur la portion (B_1) est représentée par les composantes du vecteur contrainte (t_i) et les composantes du vecteur couple de contrainte (m_i) agissant sur la surface (S_1) délimitant (B_1)

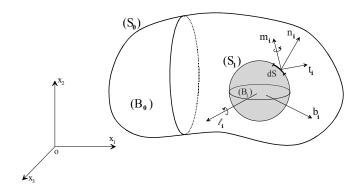


Fig. IV.1 Bilan des efforts agissant sur un élément de volume.

La théorie classique (non polaire) des fluides est basée sur l'hypothèse d'annulation des couples de contraintes m_i et des couples de volume par unité de masse ℓ_i .

Les couples de volume peuvent résulter de l'action d'un champ magnétique externe sur les particules magnétisées du matériau ou de l'action d'un champ électrique sur la matière polarisée.

Les couples de contrainte résultent des interactions entre les parties adjacentes du matériau en plus des forces colinéaires d'interaction. Le concept des couples de contrainte a été introduit pour la première fois en mécanique des milieux continus par Voigt [40] et Cosserat [41] au début du $XX^{\hat{e}me}$ siècle. Il convient de noter que certains auteurs tels que Aero et Kurshinskii [42] (1960), Toupin [43] (1962) Mindlin et Tiersten [44] ont considéré dans leurs travaux des matériaux élastiques à couple de contrainte.

IV.3 Equations de mouvement d'un fluide polaire

Pour un fluide compressible, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0; \ i = 1, 2, 3$$
 (IV.1)

où : ρ est la masse volumique du fluide et u_i sont les composantes du champ de vitesse de l'écoulement et $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ qui est la dérivé particulaire de ρ .

Les équations de conservation de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement (lois d'Euler) gouvernant le mouvement d'un fluide polaire sont :

$$\int_{B_1} \rho \gamma_i dv = \int_{\partial B_1} t_i ds + \int_{B_1} \rho b_i dv \text{ avec } \gamma_i = \frac{D^2 x_i}{Dt^2} = \frac{Du_i}{Dt}$$
(IV.2)

et

$$\int_{B_{l}} \rho \left(e_{ijk} \left(x_{j} \gamma_{k} \right) + \frac{DI_{i}}{Dt} \right) dv = \int_{\partial B_{l}} e_{ijk} x_{j} t_{k} dS + \int_{B_{l}} \rho e_{ijk} x_{j} b_{k} dv + \int_{\partial B_{l}} m_{i} dS + \int_{B_{l}} \rho \ell_{i} dv$$
(IV.3)

où : e_{ijk} est le tenseur permutation antisymétrique d'ordre 3 et I_i est la quantité de mouvement angulaire intrinsèque par unité de masse.

L'équation (IV.3) exprime le principe du moment de la quantité de mouvement.

En utilisant la notation vectorielle, les équations (IV.2) et (IV.3) prennent la forme suivante :

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_1} \rho \vec{V} dv = \int_{\partial B_1} \vec{t} \, dS + \int_{B_1} \rho \vec{b} \, dv \tag{IV.4}$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_1} (\vec{r} \Lambda \rho \vec{V} + \rho \vec{I}) dv = \int_{\partial B_1} (\vec{r} \Lambda \vec{t} + \vec{m}) dS + \int_{B_1} (\vec{r} \Lambda \rho \vec{b} + \rho \vec{\ell}) dv$$
 (IV.5)

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est le rayon vecteur.

Dans le cas non polaire (fluide newtonien), les équations (IV.3) et (IV.5) se réduisent à :

$$\int_{\partial B_1} e_{rmn} x_m t_n dS + \int_{B_1} e_{rmn} x_m b_n \rho dv = \frac{D}{Dt} \int_{B_1} e_{rmn} x_m \rho u_n dv \text{ avec } u_n = \frac{Dx_n}{Dt}$$
(IV.6)

ou encore

$$\int_{\partial B_1} (\vec{r} \wedge \vec{t}) dS + \int_{B_1} (\vec{r} \wedge \rho \vec{b}) dv = \frac{D}{Dt} \int_{B_1} (\vec{r} \wedge \rho \vec{V}) dv$$
(IV.7)

avec
$$t_n = T_{jn} n_j$$
 (IV.8)

L'application du théorème de la divergence ou de Gauss-Ostrogradsky:

 $\int_{\partial B_1} n_i T_{ij} dS = \int_{B_1} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dv \text{ ou } \int_{\partial B_1} \vec{V} \vec{n} dS = \int_{B_1} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} dv \text{ et compte tenu de l'équation (IV.8), l'équation (IV.6) devient :}$

$$\int_{B_1} e_{rmn} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (x_m T_{jn}) + x_m \rho b_n \right] dv = \int_{B_1} e_{rmn} \frac{D}{Dt} (x_m u_n) \rho dv$$
(IV.9)

Soit:

$$\int_{B_1} e_{rmn} \left[x_m \left(\frac{\partial T_{jn}}{\partial x_j} + \rho b_n \right) + \delta_{mj} T_{jn} \right] dv = \int_{B_1} e_{rmn} \left(u_m u_n + x_m \frac{D u_n}{D t} \right) \rho dv$$
(IV.10)

avec $u_m = \frac{Dx_m}{Dt}$ et δ_{mj} est le symbole de Kronecker.

Puisque $e_{\mathit{rmn}}u_{\mathit{m}}u_{\mathit{n}}=0$ car $u_{\mathit{m}}u_{\mathit{n}}$ est symétrique; $\delta_{\mathit{mj}}T_{\mathit{jn}}=T_{\mathit{mn}}$ et comme $\frac{\partial T_{\mathit{jn}}}{\partial x_{\mathit{j}}}+\rho b_{\mathit{n}}=\rho\frac{Du_{\mathit{n}}}{Dt}$, l'équation (IV.10) se réduit à :

$$\int_{R} e_{rmn} T_{mn} dv = 0 (IV.11)$$

Soit:
$$e_{rmn}T_{mn} = 0 \quad \forall (B_1)$$

Pour
$$r = 1$$
, $T_{23} - T_{32} = 0$ (IV.13)

Pour r = 2, $T_{31} - T_{13} = 0$

Pour r = 3, $T_{12} - T_{21} = 0$

Par conséquent, nous venons de démontrer que le tenseur de contrainte dans le cas non polaire est bien symétrique ; c'est-à-dire : $T_{ji} = T_{ij}$

A partir des équations (IV.2) et (IV.3) et le principe de contrainte d'Euler et de Cauchy, nous pouvons montrer l'existence du tenseur des couples de contrainte T_{ij} et du tenseur des couples de contrainte M_{ij} qui sont donnés par les relations suivantes :

$$t_i = n_i T_{ii}$$
; $i,j = 1,2,3$ (IV.14)

$$m_{i} = n_{j}M_{ji}$$
; $i, j = 1,2,3$ (IV.15)

0ù : n_j sont les composantes de la normale à la surface sur laquelle agissent \vec{t} et \vec{m} tels que

$$\vec{t} = t_i \vec{e}_i \text{ et } \vec{m} = m_i \vec{e}_i.$$

En substituant (IV.14) et (IV.15) dans (IV.2) et (IV.3) et après simplification, nous trouvons les lois de mouvement de Cauchy:

$$\rho \frac{D^2 x_i}{Dt^2} = T_{ji} + \rho b_i \tag{IV.16}$$

$$M_{ji,j} + \rho \ell_i + e_{ijk} T_{jk} = \rho \frac{DI_i}{Dt}$$
(IV.17)

Le tenseur de contrainte T_{mn} n'est plus symétrique, mais il peut être exprimé comme la somme d'une partie symétrique $T_{(mn)}$ et une partie antisymétrique notée $T_{[mn]}$:

$$\begin{cases}
T_{(mn)} = \frac{1}{2} (T_{mn} + T_{nm}) \\
T_{[mn]} = \frac{1}{2} (T_{mn} - T_{nm})
\end{cases}$$
(IV.18)

La quantité $e_{\mathit{rmn}}T_{\mathit{mn}}$ n'est plus nulle et s'exprime :

Pour
$$r = 1$$
, $e_{1mn}T_{mn} = 2T_{[23]}$

Pour
$$r = 2$$
, $e_{2mn}T_{mn} = 2T_{[31]}$ (IV.19)

Pour
$$r = 3$$
, $e_{3mn}T_{mn} = 2T_{[12]}$

Dans le cas où $\,I_i=0\,$, l'équation (IV.17) prend la forme suivante :

$$M_{ji,j} + \rho \ell_i + e_{ijk} T_{jk} = 0$$
 (IV.20)

En prenant le rotationnel de l'équation (IV.20), nous trouvons:

$$T_{[ji],j} = \frac{1}{2} \left\{ e_{ijs} M_{rs,rj}^{(D)} + e_{ijs} (\rho \ell_s)_{,j} \right\}$$

où
$$T_{[ij]} = \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) = T_{ij}^{(A)}$$

$$M_{ij}^{(D)}=M_{ij}-\frac{1}{3}M_{rr}\delta_{ij}$$

Puisque $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{M}) = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{M}^{(D)})$. En remplaçant dans l'équation (IV.16), nous obtenons :

$$\rho \frac{D^2 x_i}{Dt^2} = T_{(ji),j} + \frac{1}{2} \left\{ e_{ijs} M_{rs,rj}^{(D)} + e_{ijs} \left(\rho \ell_s \right)_{,j} \right\} + \rho b_i$$
(IV.21)

$$O\dot{\mathbf{u}}: T_{(ij)} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) = T_{ij}^{(s)}$$

A partir de l'équation (IV.20), nous trouvons aussi :

$$T_{[ij]} = -\frac{1}{2} \left\{ e_{ijs} M_{rs,r} + \rho e_{ijs} \ell_s \right\}$$
 (IV.22)

Dans le cas où les couples de volume ℓ_s (s=1,2,3) sont négligés, dans ce cas le fluide est dit fluide à couple de contrainte, la partie antisymétrique du tenseur de contrainte s'exprime alors :

$$T_{[ij]} = -\frac{1}{2} e_{ijs} M_{rs,r}$$
 (IV.23)

IV.4 Lois de conservation d'énergie pour un fluide polaire

L'équation d'énergie est fournie par la thermodynamique en appliquant le principe de conservation. Ce dernier s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{D}{Dt}(E+K) = P_e + Q$$
(IV.24)

D'autre part, le théorème de l'énergie cinétique (conséquence de l'équation de bilan de la quantité de mouvement) s'écrit :

$$\frac{DK}{Dt} = P_e + P_i \tag{IV.25}$$

Dans les équations (IV.24) et (IV.25), P_e et P_i sont respectivement les puissances réelles des actions extérieures et intérieures s'exerçant sur (B_1) , $E = \int_R \rho e \, dv$ est l'énergie interne attachée à (B_1) .

$$P_{e} = \int_{\partial B_{1}} \vec{t} \, \vec{V} dS + \int_{B_{1}} \rho \vec{b} \, \vec{V} dv + \int_{\partial B_{1}} \vec{m} \, \vec{\omega} dS + \int_{B_{1}} \rho \vec{\ell} \, \vec{\omega} dv \text{ et } P_{i} = -\int_{B_{1}} \overline{\vec{T}} : \overline{\vec{D}} dv - \int_{B_{1}} \overline{\vec{M}} : \overline{\vec{K}} dv$$

 $\overset{\circ}{Q} = -\int\limits_{\partial B_1} \vec{q} \vec{n} dS + \int\limits_{B_1} \rho r dv \text{ est appelé le taux de chaleur reçu par } \left(B_1\right) \text{ et } K = \frac{1}{2} \int\limits_{B_1} \rho \vec{V} \bullet \vec{V} dv \text{ est l'énergie cinétique attachée à } \left(B_1\right).$

Nous en déduisons, en soustrayant les deux relations (IV.24) et (IV.25) membre à membre :

$$\frac{DE}{Dt} = -P_i + \overset{\circ}{Q} \tag{IV.26}$$

La dérivée particulaire de l'énergie cinétique et de la puissance réelle des actions extérieures ont été éliminées. L'équation (IV.26), dite équation de bilan d'énergie interne, peut être interprétée de la façon suivante :

« la variation d'énergie interne est due à la puissance réelle des actions intérieures et à un apport de chaleur ».

Compte tenu des expressions de E et $\overset{\circ}{\mathbf{Q}}$, l'équation de bilan d'énergie (IV.26) prend la forme suivante :

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_1} \rho e dv = \int_{B_1}^{\overline{T}} : \overline{L} dv + \int_{B_1}^{\overline{M}} : \overline{K} dv + \int_{B_1} \rho r dv - \int_{\partial B_1} \vec{q} \vec{n} dS$$
(IV.27)

ou encore:

$$\frac{D}{Dt} \int_{B_1} \rho e \, dv = \int_{B_1} T_{ji} L_{ij} dv + \int_{B_1} M_{ji} K_{ij} dv + \int_{B_1} \rho r dv - \int_{\partial B_1} q_i n_i dS$$
(IV.28)

 $T_{ji} = T_{(ji)} + T_{[ji]}$ est le tenseur de contrainte (non symétrique) et $L_{ij} = u_{i,j} = D_{ij} + W_{ij}$ est le tenseur gradient de vitesse décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique.

 $D_{ij} = \frac{1}{2} \Big(u_{i,j} + u_{j,i} \Big) \text{et } W_{ij} = \frac{1}{2} \Big(u_{i,j} - u_{j,i} \Big) \quad \text{\'etant respectivement les tenseurs des taux de d\'eformation}$ (symétrique) et tourbillon ou de vorticité (antisymétrique).

Le premier terme du second membre de l'équation (IV.28) s'écrit aussi :

$$\int_{B_i} \left(T_{(ji)} D_{ij} + T_{[ji]} W_{ij} \right) dv \tag{IV.29}$$

avec $T_{[ji]}W_{ij} = e_{mni}T_{mn}\omega_i$ et $K_{ij} = \omega_{j,i}$ est le tenseur gradient de vorticité tel que $\omega_i = \frac{1}{2}e_{irs}U_{s,r} = \frac{1}{2}e_{irs}W_{rs}$ est la ième composante du vecteur tourbillon ou vorticité.

 $q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}$ est la ième composante du vecteur densité de flux de chaleur et r est la densité volumique du taux

de chaleur reçu par (B_1) ou source de chaleur interne souvent négligée. Nous devrons la prendre en compte pour les phénomènes de rayonnement (radiation) ou lorsque des sources de chaleur apparaissent par réaction chimique.

L'application du théorème de la divergence permet de transformer le dernier terme de l'équation (IV.28) :

$$\int_{\partial B_1} q_i n_i dS = \int_{B_1} q_{i,i} dv = -\int_{B_1} (\kappa T_{,i})_{,i} dv$$
 (IV.30)

Compte tenu de l'équation (IV.30), l'équation (IV.28) s'écrit sous la forme locale comme suit :

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{(ij)}D_{ij} + M_{ij}K_{ij} - q_{i,i} + \rho r$$
(IV.31)

avec
$$M_{ij}K_{ij} = \left(M_{ij}^{(D)} + \frac{1}{3}M_{kk}\delta_{ij}\right)K_{ij} = M_{ij}^{(D)}K_{ij}$$

$$\text{Car } \mathcal{S}_{ij} K_{ij} = K_{ii} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = 0 \text{ , ou sous forme vectorielle} : \vec{\nabla} \bullet \vec{\omega} = \vec{\nabla} \bullet \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \right) = 0$$

Par conséquent, l'équation d'énergie (IV.31) devient :

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{(ij)} D_{ij} + M_{ij}^{(D)} K_{ij} - q_{i,i} + \rho r$$
(IV.32)

Il est intéressant de noter que seulement la partie symétrique du tenseur de contrainte et le tenseur déviateur des couples de contrainte apparaissent dans l'équation d'énergie.

Dans le cas non polaire (i.e, fluide newtonien), l'équation d'énergie (IV.32) se simplifie et prend la forme suivante :

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{ij}D_{ij} - q_{i,i} + \rho r \tag{IV.33}$$

avec $T_{ij} = T_{(ij)}$.

IV.5 Equations constitutives d'un fluide polaire

Dans le cas d'un fluide polaire de V. K. Stokes, la partie symétrique du tenseur des contraintes et le déviateur du tenseur des couples de contraintes s'expriment :

$$T_{(ii)} = -p\delta_{ii} + \lambda D_{kk}\delta_{ii} + 2\mu D_{ii}$$
(IV.34)

$$M_{ij}^{(D)} = 4\eta K_{ij} + 4\eta' K_{ji}$$
 (IV.35)

où $D_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ est le taux de dilatation cubique.

Notons que la loi de comportement (IV.34) est identique à celle utilisée dans le cas d'un milieu non polaire. Les dimensions des caractéristiques du fluide λ et μ sont celles de la viscosité $\left(i.e.,\left[\lambda\right]=\left[\mu\right]=ML^{-1}T^{-1}\right)$ tandis que les dimensions de η et η' sont celles de la quantité de mouvement, à savoir :

$$[\eta] = [\eta'] = MLT^{-1}$$
. Le rapport $\frac{\eta}{\mu}$ a la dimension d'une longueur au carré notée ℓ^2 ; c'est à dire $\ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$.

Rappelons que le tenseur des couples de contrainte s'écrit :

$$M_{ij} = m\delta_{ij} + 4\eta K_{ij} + 4\eta' K_{ij}$$
 (IV.36)

avec :
$$m = \frac{1}{3} M_{rr}$$

En remplaçant l'équation (IV.36) dans l'équation (IV.22), nous trouvons les expressions de la partie antisymétrique du tenseur de contrainte :

$$T_{[ij]} = -\frac{1}{2}e_{ijs}m_{,s} - 2\eta W_{ij,rr} - \frac{1}{2}\rho e_{ijs}\ell_{s}$$
 (IV.37)

L'équation (IV.37) est obtenue en supposant η et η' constants.

Si par hypothèse, le fluide est incompressible ; c'est-à-dire $u_{r,r}=0$ et les couples de volumes ℓ_s sont négligés, l'équation (IV.37) devient :

$$T_{[ij]} = -\frac{1}{2}e_{ijs}m_{,s} - 2\eta W_{ij,rr}$$
 (IV.38)

où *m* est souvent pris égal à zéro ce qui permet d'écrire l'équation (IV.38) sous la forme :

$$T_{[ii]} = -2\eta W_{ii,rr}$$
 (IV.39)

IV.6 Equations de mouvement d'un fluide polaire

Si nous considérons que les coefficients λ , μ , η , η' sont constants, la substitution des équations (IV.34) à (IV.36) dans l'équation (IV.21) permet d'obtenir les équations de mouvement du fluide polaire lorsque nous prenons en considération des couples de volume et des couples de contrainte) :

$$\rho \frac{Du_{i}}{Dt} = -p_{,i} + (\lambda + \mu)(u_{r,r})_{,i} + \mu u_{i,rr} - \eta u_{i,rrss} + \eta (u_{r,r})_{,iss} + \frac{1}{2}e_{irs}(\rho \ell_{s})_{,r} + \rho b_{i}$$
(IV.40)

Pour un fluide incompressible $(u_{r,r} = 0)$ et dans le cas où les forces et les couples de volume sont négligées, l'équation (IV.40) se simplifie et prend la forme suivante :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -p_{,i} + \mu u_{i,rr} - \eta u_{i,rrss} \tag{IV.41}$$

ou encore :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} - \eta \vec{\nabla}^4 \vec{V}$$
 (IV.42)

En coordonnées cartésiennes, l'équation (IV.41) et l'équation de conservation de la masse s'écrivent:

$$\rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) - \eta \left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4} \right) - 2\eta \left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} \right)$$
(IV.43a)

$$\rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) - \eta \left(\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4} \right) - 2\eta \left(\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} \right)$$
(IV.43b)

$$\rho \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) - \eta \left(\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3^4} \right) - 2\eta \left(\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} \right)$$
(IV.43c)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$
 (IV.44)

En utilisant les hypothèses de la lubrification hydrodynamique établies pour ce type d'écoulement, les équations de mouvement de Stokes se réduisent à [Annexe A] :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \eta \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4}$$
 (IV.45a)

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - \eta \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4}$$
 (IV.45b)

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 {(IV.45c)}$$

Les solutions générales des équations (IV.45a) et (IV.45b) sont de la forme :

$$\begin{cases} u_{1}(x_{1}, x_{2}, x_{3}) = A_{0} + A_{1}x_{3} + B_{1}\cosh\left(\frac{x_{3}}{\ell}\right) + B_{2}\sinh\left(\frac{x_{3}}{\ell}\right) + \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x_{1}}x_{3}^{2} \\ u_{2}(x_{1}, x_{2}, x_{3}) = C_{0} + C_{1}x_{3} + D_{1}\cosh\left(\frac{x_{3}}{\ell}\right) + D_{2}\sinh\left(\frac{x_{3}}{\ell}\right) + \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x_{2}}x_{3}^{2} \end{cases}$$
(IV46)

IV.7 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée

La dérivation de l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide polaire dans le cas du patin incliné de Mitchell (figure IV.2) est basée sur les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, 0) = U \\ u_2(x_1, x_2, 0) = 0 \end{cases}$$
 (IV.47a)

$$\left. \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right|_{x_3 = 0} = \left. \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right|_{x_3 = 0} = 0 \tag{IV.47b}$$

$$u_1(x_1, x_2, h) = 0$$
 (IV.48a)

$$u_2(x_1, x_2, h) = 0$$
 (IV.48b)

$$\left. \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right|_{x_2 = h} = \left. \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right|_{x_2 = h} = 0 \tag{IV.48c}$$

$$u_3(x_1, x_2, 0) = u_3(x_1, x_2, h) = 0$$
 (IV.49)

L'équation (IV.47a) représente la condition limite de non glissement et les équations (IV.47b) et (IV.47c) représentent les conditions permettant l'annulation des couples de contraintes au niveau des parois.

L'utilisation des conditions limites (IV.47a) à (IV.48c) permet d'exprimer les vitesses de l'écoulement d'un fluide polaire par :

$$\begin{cases} u_{1} = U \frac{x_{3}}{h} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_{1}} \left(x_{3}(x_{3} - h) + 2\ell^{2} \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{2x_{3} - h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \right) \\ u_{2} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_{2}} \left(x_{3}(x_{3} - h) + 2\ell^{2} \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{2x_{3} - h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \right) \end{cases}$$
(IV.50)

En substituant les équations de la vitesse (IV.50) dans l'équation de continuité (IV.44) et en utilisant les conditions aux limites (IV.49) permet de dériver l'équation de Reynolds modifiée moyennant le théorème de Leibnitz (Eq. II.33) :

$$\vec{\nabla} \bullet \left(G^*(h, \ell) \vec{\nabla} p \right) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \text{sur } (D) = (0, L) \times (0, B)$$
 (IV.51)

οù

$$G^*(h,l) = h^3 - 12\ell^2 h + 24\ell^3 \tanh\left(\frac{h}{2\ell}\right)$$
 (IV.52)

et $\Lambda = 6\mu U$

L'équation (IV.51) décrit le comportement d'un fluide à couple de contrainte non newtonien en régime d'écoulement stationnaire, isotherme et laminaire. Notons que pour un fluide newtonien, l'équation (IV.51) se réduit à l'équation de Reynolds classique qui s'écrit sous forme condensée comme suit :

$$\vec{\nabla} \bullet (h^3 \vec{\nabla} p) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} \text{ sur } D = (0, L) \times (0, B)$$
 (IV.53)

Le champ de pression doit satisfaire à l'équation (IV.51) ou (IV.53) et aux conditions limites suivantes :

$$p = 0 \operatorname{sur} \partial D \tag{IV.54}$$

IV.8 Equation géométrique du film

La figure IV.2 représente schématiquement un patin incliné de Mitchell où seule la surface du patin fixe contiguë au film est rugueuse. Dans ces conditions, l'épaisseur du film s'exprime par:

$$h(x_1, x_2) = h_0 + h_1$$
 (IV.55)

où:

$$h_0 = \left(h_{\min} - h_{\max}\right) \frac{x_1}{L} + h_{\max} \quad \text{tel que} \quad 0 \le x_1 \le L$$
 (IV.56)

Dans l'équation (IV.56) h_{\min} et h_{\max} représentent respectivement les épaisseurs minimale et maximale du film mesurées à l'entrée et la sortie du contact.

L'équation (IV.56) donne l'épaisseur nominale du film définie comme la distance entre la glissière et le niveau moyen de la surface du patin

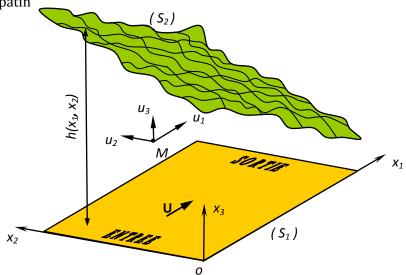


Fig. IV.2 Schéma du patin incliné rugueux.

 h_1 représente l'amplitude des rugosités mesurées par rapport au niveau moyen de la surface rugueuse.

IV.9 Performances hydrodynamiques du contact

La détermination de la répartition de la pression dans le film lubrifiant p pour une valeur du rapport $r=\frac{h_{\max}}{h_{\min}}>1$ permet de déterminer les performances statiques du contact, à savoir :

IV.9.1 Portance hydrodynamique

La portance de l'écoulement est obtenue en intégrant le champ de pression hydrodynamique p sur la surface du patin :

$$W = \int_0^L \int_0^B p(x_1, x_2) dx_2 dx_1$$
 (IV.57)

Cette relation est similaire à celle du chapitre II.

IV.9.2 Force de frottement

L'intégration des contraintes de cisaillement à la surface de la glissière permet de calculer la force de frottement :

$$F = \int_0^L \int_0^B \left(\mu \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right]_{x_3 = 0} - \eta \left[\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_3^3} \right]_{x_3 = 0} \right) dx_2 dx_1 = -\int_0^L \int_0^B \left(\mu \frac{U}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) dx_2 dx_1$$
 (IV.58)

Cette relation est similaire à celle établie dans le cas newtonien dans le chapitre II.

IV.9.3 Vitesses moyennes de l'écoulement et débit de fuite

Les vitesses moyennes de l'écoulement et le débit de fuite moyen du patin sont calculés par :

$$\begin{cases}
\overline{u}_{1}(x_{1}, x_{2}) = \frac{1}{h} \int_{0}^{h} u_{1}(x_{1}, x_{2}, x_{3}) dx_{3} = \frac{U}{2} - \frac{G^{*}(h, \ell)}{12\mu h} \frac{\partial p}{\partial x_{1}} \\
\overline{u}_{2}(x_{1}, x_{2}) = \frac{1}{h} \int_{0}^{h} u_{2}(x_{1}, x_{2}, x_{3}) dx_{3} = -\frac{G^{*}(h, \ell)}{12\mu h} \frac{\partial p}{\partial x_{2}}
\end{cases}$$
(IV.59)

$$\overline{Q} = \left| \overline{Q}_0 \right| + \left| \overline{Q}_B \right| \tag{IV.60}$$

où:

$$\overline{Q}_0 = \int_0^L [h\overline{u}_2] dx_1 \quad \text{et} \quad \overline{Q}_B = \int_0^L [h\overline{u}_2] dx_1$$
(IV.61)

 $\overline{Q}_{\scriptscriptstyle 0}$ et $\,\overline{Q}_{\scriptscriptstyle B}\,$ étant les débits de fuite moyens aux extrémités libres du patin.

IV.9.4 Puissance dissipée

La puissance dissipée peut être calculée à partir de l'intégration de la fonction de dissipation visqueuse Φ :

$$P = \int_{0}^{L} \int_{0}^{B} \Phi(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1$$
 (IV.62)

où

$$\Phi = \lambda (\nabla_i u_i)^2 + \frac{\mu}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)^2 - \eta (\nabla_r \nabla_r e_{kmn} \nabla_m u_n) (e_{kij} \nabla_i u_j)$$
(IV.63)

avec $\nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ qui sont les composantes cartésiennes de l'opérateur différentiel $\vec{\nabla}$.

En utilisant les hypothèses de la lubrification hydrodynamique, l'expression de Φ se réduit à:

$$\Phi = \mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 - \ell^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_3^3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_3^3} \right) \right]$$
(IV.64)

Page 104 de 167

Lorsque ℓ tend vers zéro (cas newtonien), l'équation. (IV.64) se réduit à (II.24).

La puissance dissipée totale *P* comprend deux termes correspondant aux effets de Hagen-Poiseuille et de Couette qui s'expriment comme suit:

$$P_{Hagen-Poiseuille} = \int_{0}^{L} \int_{0}^{B} \frac{G^{*}(h,\ell)}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_{1}} \right)^{2} + \left(\frac{\partial p}{\partial x_{2}} \right)^{2} \right] dx_{2} dx_{1}$$
(IV.65)

$$P_{Couette} = \int_{0}^{L_B} \int_{0}^{\mu U^2} dx_2 dx_1$$
 (IV.66)

IV. 10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté en détail les lois fondamentales de la théorie des milieux continus de V. K. Stokes, à savoir : les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment de la quantité de mouvement et de l'énergie ainsi que les lois constitutives en vue de décrire l'écoulement d'un fluide polaire en prenant en considération les couples de contrainte. L'existante de ces derniers est due à la présence des polymères additifs dans les huiles lubrifiantes. Ce type de fluide, est appelé fluide à couple de contrainte, se caractérise par le paramètre $\ell = \sqrt{\eta_\mu}$ qui représente physiquement la longueur de la chaine du polymère. Sur la base de cette théorie, nous avons dérivé à partir des équations de mouvement et de continuité écrite dans le cas incompressible une équation aux dérivées partielles du second ordre linéaire appelée équation de Reynolds modifiée dont l'inconnue principale est la pression dans le fluide.

Ce chapitre a été complété par la formulation des caractéristiques hydrodynamiques du contact, à savoir : la puissance dissipée et le débit de fuite dont les expressions diffèrent de celles établies dans le cas newtonien.

Dans ce qui suit, nous allons appliquer la théorie d'homogénéisation à l'équation de Reynolds modifiée afin de résoudre le problème de lubrification hydrodynamique dans les contacts rugueux lubrifiés par des fluides à couples de contrainte dont le comportement est non newtonien en vue de mettre en évidence les effets combinés de la rugosité des surfaces et de la rhéologie du fluide sur le comportement hydrodynamique des systèmes lubrifiés.

CHAPITRE V

Homogénéisation de l'équation de Reynolds non newtonienne

V.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons la technique d'homogénéisation pour l'analyse théorique du problème de lubrification hydrodynamique dans les contacts rugueux lubrifiés par des fluides non newtoniens. Nous supposons, par hypothèse, que la surface stationnaire du contact est rugueuse tandis que la surface mobile est parfaitement lisse. Cette hypothèse nous permettra d'utiliser l'équation de Reynolds dérivée, dans le chapitre précédent sans la prise en considération du terme transitoire figurant dans le second membre de l'équation. Pour pouvoir appliquer cette technique, nous supposerons d'autre part que la distribution des rugosités est périodique sur toute la surface du contact. Nous montrerons que le processus d'homogénéisation de l'équation de Reynolds conduit à la résolution par la méthode des différences finies de deux problèmes, à savoir :

- Un problème local gouverné par trois équations aux dérivées partielles du second ordre dont les inconnues sont des fonctions périodiques locales ;
- Un problème global régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée supposée nulle sur la frontière du domaine d'intégration.

La validation de la technique d'homogénéisation sera effectuée en comparant les résultats obtenus à partir de cette technique avec ceux issus de l'application de la méthode déterministe classique dans le cas d'un patin incliné de Mitchell en considérant trois formes de rugosités : transversales, longitudinales et anisotropes ayant la même rugosité RMS.

L'étude des effets combinés des rugosités et des couples de contraintes existant dans le fluide sur les performances hydrodynamiques du contact tels que la portance, le nombre de frottement, la puissance dissipée et le débit de fuite sera aussi envisagé.

V.2 Equation de base de la lubrification hydrodynamique par fluide à couple de contrainte

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que pour un fluide à couple de contrainte, l'équation de Reynolds modifiée s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \bullet (G_{\varepsilon} \vec{\nabla} p_{\varepsilon}) = 6\mu \vec{\nabla} \bullet (h_{\varepsilon} \vec{U}) \operatorname{sur}(D) = (0, L) \times (0, B)$$
(V.1)

où

$$G_{\varepsilon}(h_{\varepsilon},\ell) = h_{\varepsilon}^{3} - 12\ell^{2}h_{\varepsilon} + 24\ell^{3} \tanh\left(\frac{h_{\varepsilon}}{2\ell}\right)$$
 (V.2)

et $\Lambda = 6\mu U$

L'équation (V.1) s'écrit aussi :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_{1}} : \frac{\partial}{\partial x_{2}} \right\rangle \begin{cases} G_{\varepsilon} & \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_{1}} \\ G_{\varepsilon} & \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_{2}} \end{cases} = 6\mu \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{1}} : \frac{\partial}{\partial x_{2}} \right\rangle \begin{cases} h_{\varepsilon}(U_{11} + U_{21}) \\ h_{\varepsilon}(U_{12} + U_{22}) \end{cases} \tag{V.3}$$

où : h_{ε} est l'épaisseur du film exprimée par l'équation (III.3).

La pression déterministe p_{ε} doit satisfaire à l'équation (V.1) et à la condition de Dirichlet (III.4).

V.3 Application au patin incliné

V.3.1.Cas du patin de dimensions finies (3D)

Dans le cas du patin incliné (figure III.1), les équations de la lubrification hydrodynamique prennent la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \bullet \left(G_{\varepsilon} \vec{\nabla} p_{\varepsilon} \right) = \Lambda \frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_{1}} \tag{V.4}$$

où h_{ε} est définie par l'équation (III.6)

La discrétisation de l'équation (V.4) par la méthode des différences finies centrées (figure III.3) conduit au système d'équations algébriques suivant :

$$a_{ij} p_{\varepsilon_{i+1}, i} + b_{ij} p_{\varepsilon_{i-1}, i} + c_{ij} p_{\varepsilon_{i}, i+1} + d_{ij} p_{\varepsilon_{i}, i-1} - e_{ij} p_{\varepsilon_{ij}} = f_{ij}$$
(V.5)

où :

$$\begin{split} a_{ij} &= \frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta x_{1}^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial x_{1}}\right)_{ij}}{\Delta x_{1}}; \quad b_{ij} &= \frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta x_{1}^{2}} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial x_{1}}\right)_{ij}}{\Delta x_{1}}; \quad c_{ij} &= \frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta x_{2}^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial x_{2}}\right)_{ij}}{\Delta x_{2}}; \quad d_{ij} &= \frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta x_{2}^{2}} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial x_{2}}\right)_{ij}}{\Delta x_{2}}; \\ e_{ij} &= 2G_{\varepsilon_{ij}} \left(\frac{1}{\Delta x_{1}^{2}} + \frac{1}{\Delta x_{2}^{2}}\right); \qquad f_{ij} &= \Lambda \left(\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x_{1}}\right)_{ij} \end{split}$$

 Δx_i étant respectivement les pas du maillage suivant les directions x_i .

Comme dans le cas newtonien, le système d'équations (V.5) résultant de la discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée (V.4) peut être résolu par la méthode itérative du gradient conjugué ou de la méthode des sur-relaxations successives (S.O.R) de Gauss-Seidel.

V.3.2. Cas du patin de largeur infinie (2D)

Lorsque la largeur de patin suivant x_2 est très grande devant sa longueur, l'équation de Reynolds (V.4) se réduit à :

$$\frac{d}{dx_1} \left(G_{\varepsilon} \frac{dp_{\varepsilon}}{dx_1} \right) = \Lambda \frac{dp_{\varepsilon}}{dx_1} \tag{V.6}$$

avec:
$$h_{\varepsilon} = h_0(x_1) + h_1(x_1/\varepsilon)$$

Les conditions limites associées à l'équation (V.6) sont $p_{\varepsilon}(x_1=0)=p_{\varepsilon}(x_1=L)=0$.

La solution de l'équation (V.6) est recherchée numériquement à l'aide de la méthode des différences finies centrées.

V.4 Application de la méthode d'homogénéisation

L'application du processus d'homogénéisation décrit dans le chapitre III conduit aux équations des dérivées partielles suivantes :

• Equations aux dérivées partielles locales :

$$\vec{\nabla}_{y} \bullet \left(G_{\varepsilon} \vec{\nabla}_{y} v_{1} \right) = -\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{1}} \tag{V.7}$$

$$\vec{\nabla}_{y} \bullet \left(G_{\varepsilon} \vec{\nabla}_{y} v_{2} \right) = -\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}} \tag{V.8}$$

$$\vec{\nabla}_{y} \bullet \left(G_{\varepsilon} \vec{\nabla}_{y} v_{3} \right) = \Lambda \frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y_{1}} \tag{V.9}$$

• Equation aux dérivées partielles globale :

$$\vec{\nabla}_{x} \bullet \left(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vec{\nabla} p_{0} \right) = \vec{\nabla}_{x} \bullet \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) \text{ sur } (D)$$

$$\text{avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(x_{1}, x_{2}) & a_{12}(x_{1}, x_{2}) \\ a_{21}(x_{1}, x_{2}) & a_{22}(x_{1}, x_{2}) \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\theta} = \begin{cases} \theta_{1}(x_{1}, x_{2}) \\ \theta_{2}(x_{1}, x_{2}) \end{cases}$$

Les coefficients a_{ij} et θ_i sont définis par :

$$a_{11} = \int_{Y} G_{\varepsilon} \left(1 + \frac{\partial v_{1}}{\partial y_{1}} \right) dY \; ; \; a_{12} = \int_{Y} G_{\varepsilon} \frac{\partial v_{2}}{\partial y_{1}} dY \; ; \; a_{21} = \int_{Y} G_{\varepsilon} \frac{\partial v_{1}}{\partial y_{2}} dY \; ; \; a_{22} = \int_{Y} G_{\varepsilon} \left(1 + \frac{\partial v_{2}}{\partial y_{2}} \right) dY$$

$$\theta_{1} = \int_{Y} \left(\Lambda h_{\varepsilon} - G_{\varepsilon} \frac{\partial v_{3}}{\partial y_{1}} \right) dY \; ; \quad \theta_{2} = -\int_{Y} G_{\varepsilon} \frac{\partial v_{3}}{\partial y_{2}} dY \qquad (V.11)$$

La pression homogénéisée p_0 doit satisfaire à l'équation (V.10) ainsi qu'à la condition de Dirichlet p_0 = 0 sur la frontière ∂D .

Dans le cas lisse, c'est-à-dire : $h(x) = h_0(x)$ l'équation (V.10) se réduit à l'équation de Reynolds modifiée classique, i.e. :

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (h_0(x)) - \vec{\nabla} \bullet (G_0^*(x) \vec{\nabla} p_0) = 0$$
(V.12)

La discrétisation par la méthode des différences finies centrées des équations locales (V.7) à (V.9) sur la cellule unitaire Y conduit à un système d'équations similaire à (III.32) où les coefficients α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} , δ_{ij} et ε_{ij} sont définis comme suit:

$$\alpha_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{1}}\right)_{ij}}{\Delta y}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^{2}} ; \beta_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{1}}\right)_{ij}}{\Delta y}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y}}{4G_{\varepsilon_{ij}} / \Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y^{2}} ; \gamma_{ij} = \frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} + \frac{1}{2} \frac{G_{\varepsilon_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \frac{\frac{G_{\varepsilon_{ij}}}{\Delta y^{2}} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{\Delta y}}{4G_{\varepsilon_{ij}}}; \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{1}}\right)_{ij}}{4G_{\varepsilon_{ij}}}; \quad \varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{2}}\right)_{ij}}{4G_{\varepsilon_{ij}}}; \quad \varepsilon_{ij}^{(3)} = \frac{\left(\frac{\partial G_{\varepsilon}}{\partial y_{1}}\right)_{ij}}{4G_{\varepsilon_{ij}}}$$

L'application de la méthode des différences finies centrées à l'équation (V.10) conduit à une équation discrétisée similaire à l'équation (III.34).

Notons que dans le cas du patin infiniment large, les équations locales et globales se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(G_{\varepsilon} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial (G_{\varepsilon})}{\partial y} \tag{V.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(G_{\varepsilon} \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) = \Lambda \frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial y}$$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} - \frac{d}{dx} \left(A(x) \frac{dp_0}{dx} \right) = 0 \tag{V.14}$$

$$ou: \quad \theta(x) = \int_{Y} \left(\Lambda h_{\varepsilon}(x, y) - G_{\varepsilon}(x, y) \frac{\partial v_{3}}{\partial y} \right) dy \quad ; \quad A(x) = \int_{Y} G_{\varepsilon} \left(1 + \frac{\partial v_{1}}{\partial y} \right) dy$$

et
$$(Y) = (0,1)$$

V.5 Etude paramétrique : Effets des rugosités de surface et des couples de contrainte sur les performances hydrodynamiques du patin

Un programme de calcul a été élaboré en se basant sur l'algorithme d'homogénéisation exposé dans le présent chapitre en vue de simuler le comportement du patin hydrodynamique rugueux utilisant un fluide à couple de contrainte comme lubrifiant. Les données de cette étude sont reportées dans le tableau III.3. A ces données,

nous avons rajoutées les valeurs de la constante physique du fluide η responsable de la présence des couples de contrainte qui sont : $\eta = 0$., 16×10^{-14} et 4.32×10^{-14} N.s

Les valeurs de ℓ correspondantes sont respectivement égales à $\ell = 0., 4 \times 10^{-7}$ et 1.2×10^{-6} m

Notons que la valeur nulle de η correspond au cas newtonien.

La figure V.1 représente les évolutions des performances hydrodynamiques du contact en fonction de l'amplitude relative des rugosités pour les différentes formes de rugosité (longitudinales, transversales et anisotropes) représentées sur la figure III.2. Les calculs ont été effectués par la méthode d'homogénéisation pour trois valeurs du paramètre de couple de contrainte adimensionné, à savoir : $\tilde{\ell} = \ell/h_{\rm min} = 0., 0.1$ et 0.3. Nous observons que pour les rugosités transversales et anisotropes, la pression maximale, la portance, la puissance dissipée et le nombre de frottement sont sensiblement influencés par l'amplitude des rugosités aussi bien pour le cas newtonien que non newtonien. Cependant, ces paramètres ne sont pas affectés de façon significative par l'amplitude dans le cas des rugosités longitudinales.

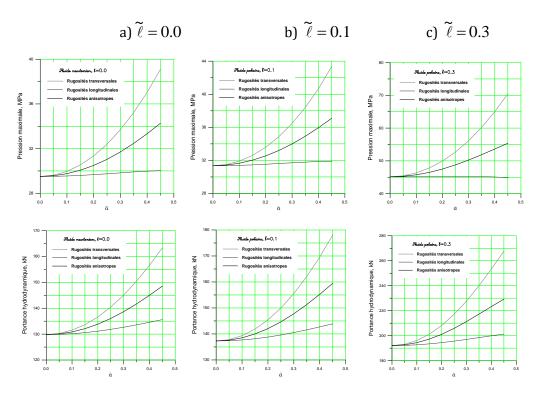


Fig. V.1 Variations des performances hydrodynamiques du contact en fonction de l'amplitude relative des rugosités pour différentes valeurs du paramètre de couple de contrainte.

Les résultats obtenus montrent aussi que l'amplitude des rugosités n'a pas d'effet appréciable sur le débit de fuite quelque soit la forme de rugosité. Il est intéressant de souligner que pour une même valeur de l'amplitude, la pression maximale et la portance hydrodynamique calculées dans le cas des rugosités transversales sont nettement supérieures à celles obtenues avec les rugosités anisotropes et longitudinales.

Le tableau V.1 donne une quantification des effets des différentes rugosités sur les performances du patin. Les valeurs de ces performances correspondant à deux valeurs de l'amplitude relative de la rugosité $\widetilde{\alpha}=0$. (cas lisse) et $\widetilde{\alpha}=0.45$ obtenues dans le cas newtonien $\widetilde{\ell}=0$. et non newtonien $\widetilde{\ell}=0.3$

Tableau V.1 Comparaisons des performances hydrodynamiques obtenues dans le cas lisse et rugueux pour deux valeurs du paramètre de couple de contrainte.

		$\widetilde{\ell} = 0.0$		$\widetilde{\ell} = 0.3$	
Performances	Type de rugosité	Valeur	Ecart	Valeur	Ecart
			relatif,		relatif,
			(%)		(%)
	Cas lisse ($\tilde{\alpha} = 0.0$)	29.5		45.1	
Pression maximale, (<i>MPa</i>)	Transversale	39.06	+32.4	70.35	+56
	Longitudinale	30.00	+1.7	45.00	-0.22
	Anisotrope	34.50	+16.9	55.30	+22.62
	Cas lisse ($\widetilde{\alpha} = 0.0$)	130		192	
Portance, (kN)	Transversale	163.0	+25.40	267.4	+39.27
	Longitudinale	136.0	+4.61	200.0	+4.20
	Anisotrope	148.4	+14.15	229.1	+19.32

La figure V.2 montre les variations des performances hydrodynamiques en fonction du rapport r pour trois valeurs du paramètre de couple de contrainte adimensionné $\widetilde{\ell}=0$., 0.1 et 0.3 dans le cas d'un patin lisse et d'un patin rugueux. Précisons que l'épaisseur minimale du film à la sortie du contact est constante et prise égale à 4 microns pour tous les calculs. La variation de r est obtenue en faisant varier l'épaisseur maximale du film à l'entrée du contact de 4 à 24 microns.

Les résultats obtenus montrent une augmentation importante de la portance hydrodynamique avec le paramètre du couple de contrainte quelque soit la valeur de r; cette augmentation est plus significative dans le cas des rugosités transversales et anisotropes.

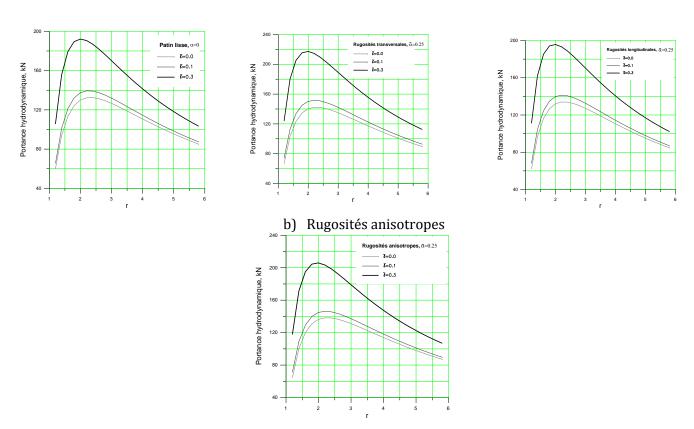
Les résultats illustrés dans la figure V.3 montrent que les rugosités transversales permettent d'améliorer la capacité de charge du patin.

Nous pouvons conclure que la présence des additifs de viscosité dans les huiles lubrifiantes permet d'améliorer la capacité de charge du patin et de réduire le frottement dans le contact surtout pour les additifs de longues chaînes moléculaires.

a) Patin lisse

b)Rugosités transversales

c)Rugosités longitudinales



 $\begin{tabular}{ll} Fig.~V.2~Variations~des~performances~hydrodynamiques~du~contact~en~fonction~du~rapport~r~pour~les\\ différentes~formes~de~rugosit\'es\\ \end{tabular}$

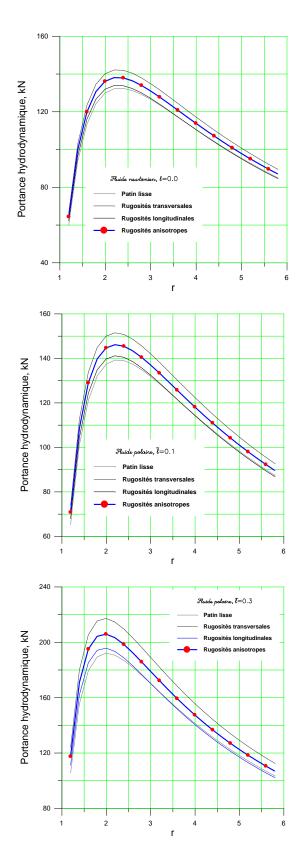


Fig. V.3 Variations de la portance hydrodynamique du contact en fonction du rapport r pour les différentes formes de rugosités.

V.6 Conclusion

Au début de ce chapitre, nous avons appliqué le processus d'homogénéisation à l'équation de Reynolds modifiée écrite pour un fluide incompressible non newtonien à couple de contrainte.

L'étude de l'influence des couples de contrainte et des rugosités de surface effectuée en utilisant la méthode d'homogénéisation a conduit aux conclusions suivantes:

- La présence des rugosités entraîne une augmentation du pic de pression surtout dans le cas des rugosités transversales ce qui confirme bien les résultats obtenus par Dobrica *et al.* en utilisant les modèles déterministes (directs) et stochastiques [21].
- Pour les rugosités transversales et anisotropes, la pression maximale et la portance sont sensiblement influencés par l'amplitude des rugosités aussi bien pour le cas newtonien que non newtonien, i. e. polaire. Cependant, ces paramètres ne sont pas affectés de façon significative par l'amplitude dans le cas des rugosités longitudinales.
- Pour une même valeur de l'amplitude, la pression maximale et la portance hydrodynamique calculées dans le cas des rugosités transversales sont supérieures à celles obtenues avec les rugosités anisotropes et longitudinales.
- La portance hydrodynamique augmente de façon importante avec le paramètre du couple de contrainte; cette augmentation est importante dans le cas des rugosités transversales et anisotropes.

Références bibliographiques des chapitres I à V

- [1] Reynolds O. On the theory of lubrication and its application to M. Beauchamp Tower's experiments, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 177, 1886, 157-234.
- [2] Norme Internationale ISO 4287, 1997, "Spécification Géométrique des Produits
- (GPS) État de Surface: Méthode du Profil ; Termes, Définitions et Paramètres

d'Etat de Surface".

- [3] Norme Internationale ISO 13565-1, 1997, "Spécification Géométrique des Produits
- (GPS) État de Surface: Méthode du Profil ; Surfaces Ayant des Propriétés

Fonctionnelles Différentes Suivant les Niveaux — Partie 1 : Filtrage et Conditions

Générales de Mesurage".

- [4] Norme Internationale ISO 13565-2, 1997, "Spécification Géométrique des Produits
- (GPS) État de Surface: Méthode du Profil ; Surfaces Ayant des Propriétés

Fonctionnelles Différentes Suivant les Niveaux — Partie 2 : Caractérisation des

Hauteurs par la Courbe de Taux de Longueur Portante".

- [5] Norme Internationale ISO 13565-3, 1997, "Spécification Géométrique des Produits
- (GPS) État de Surface: Méthode du Profil ; Surfaces Ayant des Propriétés

Fonctionnelles Différentes Suivant les Niveaux — Partie 3 : Caractérisation des

Hauteurs par la Courbe de Probabilité de Matière".

[6] Abbott E. J., Firestone F. A., 1933, "Specifying Surface Quality: A Method Based on

Accurate Measurement and Comparison", Mechanical Engineering, Vol. 55, pp.

569-572.

- [7] Tzeng S T, Saibel E., Surface roughness effect on slider lubrication, ASLE Trans 1967; vol. 10, 334
- [8] Christensen H. Stochastics models for hydrodynamic lubrication of rough surfaces. Proc. IMechE 1969-70, 184 (Part 1)
- [9] Prakash J., Tiwari K. Lubrication of a porous bearing with surface corrugations. ASME Journal of Lubrication Technology, 1982; 104, 127-34
- [10] Christensen H., Tonder K. The hydrodynamic lubrication of rough bearing surfaces of finite width, Transactions of the ASME, Journal of Lubrication Technology, July 1971, Vol. 93, Serie F, 3, 324-330.
- [11] Elrod H. G. Thin-film lubrication theory for newtonian fluids possessing striated roughness or grooving. ASME Journal of Lubrication Tech., 95, 484-489, 1973.
- [12] Patir N., Cheng H. S. Effect of surface roughness orientation on central film thickness in EHD contact, Proc. 5th Leeds-Lyon Symp. Trib., 1978, 15-21
- [13] Boedo S., Booker J. F. Surface roughness and structural inertia in a mode-based mass conserving elastohydrodynamic lubrication model, Trans. of the ASME, Journal of Tribology, Jul. 1997, 119, 3, 449-455.
- [14] Wang P., Keith T. G. Combined surface roughness of dynamically loaded journal bearings, Tribology Transactions, 2002, Vol. 45, 1-10.

- [15] Elrod J. R. A cavitation algorithm, Trans. of the ASME Journal of Lubrication Technology, July 1981, Vol. 103, 3, 350-354.
- [16] Vijayaraghavan D., Keith J. R. Development and evaluation of a cavitation algorithm, Tribology Transactions, Apr. 1989, Vol. 32, 2, 225-233.
- [17] N. B. Naduvinamani, A. Siddangouda Effect of surface roughness on the hydrodynamic lubrication of porous step-slider bearings with couple stress fluids. Tribology International, 40, 780-793, 2007.
- [18] Kweh C. C., Patching M. J., Evans H. P., Snidle R. W. Simulation of elastohydrodynamic contacts between rough surfaces, trans. of the ASME Journal of Tribology, Jul. 1992, Vol.114, 3, 412-419.
- [19] Greenwood J. A., Morales, Espejel G. E. The behavior of transverse roughness in elastohydrodynamic lubrication contact, Proc. Of the IMechE, Journal of Tribology Engg, Part J, 1994, Vol. 208, J2, 121-132.
- [20] Zhu D., Ai X. Point contact elastohydrodynamic lubrication based on optically measured three-dimensional rough surfaces, Trans. of the ASME, Journal of Tribology, Jul. 1997, Vol. 119, 3, 375-384.
- [21] Dobrica M. B., Fillon M., Maspeyrot P., 2006. Mixed elastohydrodynamic lubrication in partial journal bearings comparison between deterministic and stochastic models, ASME J. Tribol., 128, 778-788.
- [22] Dobrica M. B., Fillon M., Maspeyrot P., 2008. Influence of mixed lubrication and rough elastic-plastic contact on the performance of small fluid film bearings, STLE Tribol. Transactions, 51, 699-717.
- [23] Marchenko V. A., Khruslov E. Ya. Homogenization of partial differential equations, Birkhäuser, Boston 2006.
- **[24]** Hiroshi O., Yasuyoshi F., Noriyoshi K. Homogenization method for heterogeneous material based on boundary element method, Computers and Structures, 79, 2001, 1987-2007.
- [25] Marcin K. Sensitivity and randomness in homogenization of periodic fiber-reinforced composites via the response function method, Intl Journal of Solids and Structures, 46, 2009, 923-937.
- [26] Frêne J., Nicolas D., Degueurce B., Berthe D., Godet M., 1990. Lubrification hydrodynamique Paliers et Butées", Eyrolles, Paris.
- [27] Swift, H. W. (1931), "The Stability of Lubricating Films in Journal Bearings, J. Inst. Engrs., 233(1), 267-322.
- [28] Gumbel L., 1921, Verglieich der Ergebnisse der rech nerischen Behaudlung des lagerschmierungsproblem mit neuren Versuchsergebnissen, Monatsblätter d. Berlin, Bezirk V. D. I., 125-8
- [29] M. Kane, 2003, Contribution à l'étude de l'influence de la rugosité et des effets non newtoniens dans les contacts sévères lubrifiés, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, France.
- [30] Stokes V. K. Couple stresses in fluids, Physics of fluids, Sept. 1966, Vol. 9, 9, 1709-1715.
- $\textbf{[31]} \ \textit{J.R. Lin, 1997. Squeeze film characteristics of long partial journal bearings lubricated with couple stress fluids, Tribology Int. 30 53–58$
- [32] J.R. Lin, 1998. Squeeze film characteristics of finite journal bearings : couple stress fluid model, Tribology Int. 4, 201–207
- [33] J.R. Lin, C.B. Yang, R.F. Lu, 2001. Effects of couple stresses in the cyclic squeeze films of finite partial journal bearings, Tribology Int. 34 119–125
- [34] D.R. Oliver, 1988. Load enhancement effects due to polymer thickening in a short model journal bearings, J. Non Newtonian Fluid Mech. 30 185–196
- **[35]** U.M. Mokhiamar, W.A. Crosby, H.A. El-Gamal, 1999. A study of a journal bearing lubricated by fluids with couple stress considering the elasticity of the liner, Wear 224 194–201
- **[36]** M. Lahmar, 2005. Elastohydrodynamic analysis of doublelayered journal bearings lubricated with couple-stress fluids. Proc. I Mech E, Part J: J. Eng. Tribology 219 145–171
- [37] J.R. Lin, 2001. Linear stability analysis of a rotor bearing system : couple stress fluid model, Computers & Structures 79 801–809

- [38] X.L. Wang, K.Q. Zhu, S.Z. Wen, 2001. Thermohydrodynamic analysis of journal bearings lubricated with couple-stress fluids, Tribology Int. 34 335–343
- [39] X. L. Wang, K. Q. Zhu, S. Z. Wen, 2002. On the performance of dynamically loaded journal bearings lubricated with couple-stress fluids, Tribology Int. 35 185–191.
- [40] Voigt W. Lehrbuch der kristallphysik, Leipzig and Berlin, B. G. Teubner, 1910 (Reprinted 1928).
- [41] E. Cosserat, F. Cosserat. Théorie des corps déformables, Hermann & Cie, Paris, 1909.
- [42] Aero, E. L., E.V. Kurshinskii, 1961, Fundamendal equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles, Soviet physics Solid State,2,1272-1281.
- [43] Toupin, R. A., 1962, Elastic, materials with couple-stresses, Arch. Rational Mech. Anal., 11,385-414.
- [44] R. D. Mindlin, H. A. Tiersten, 1962. Arch. Ratl. Mech. Anal. 11, 415.

Principales notations utilisées dans les chapitres I à V

- B largeur du patin, (m)
- C_f nombre de frottement
- *F* Force de frottement, (*N*)
- h_0 épaisseur du film du contact parfait, (m)
- h_1 amplitude des rugosités, (m)
- *h* épaisseur du film lubrifiant, $h = h_0 + h_1$, (m)
- h_{\min} épaisseur minimale du film à la sortie du contact, $h_{\min} = \min(h_0), m$
- $h_{ ext{max}}$ épaisseur maximale du film à l'entrée du contact, $h_{ ext{max}} = ext{max}(h_0)$, m
- h_{ε} épaisseur déterministe du film lubrifiant, (m)
- L longueur du patin, (m)
- ℓ paramètre du couple des contraintes, $\ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$, (m)
- $ilde{\ell}$ paramètre du couple des contraintes adimensionné, $ilde{\ell}= extstyle h_{ ext{min}}$
- n_p nombre de périodes ou de rugosités, $n_p = \frac{1}{\varepsilon}$
- p pression dans le film lubrifiant, (Pa)
- p_0 pression, solution homogénéisée, (*Pa*)
- p_{ε} pression, solution déterministe, (Pa)
- P puissance dissipée, W
- \overline{Q} débit de fuite moyen, $m^3.s^{-1}$
- r rapport des épaisseurs du film à l'entrée et à la sortie du contact, $r=rac{h_{ ext{min}}}{h_{ ext{min}}}>1$
- U vitesse de déplacement de la glissière, $\emph{m.s}^{-1}$
- u_1 , u_2 composantes du champ de vitesse de l'écoulement suivant x_1 et x_2 , $m.s^{-1}$
- $\overline{u}_{\!\scriptscriptstyle 1},\overline{u}_{\!\scriptscriptstyle 2}\;$ vitesses moyennes de l'écoulement suivant $x_{\!\scriptscriptstyle 1}$ et $x_{\!\scriptscriptstyle 2}$, $\, \textit{m.s}^{^{-1}}$
- W portance hydrodynamique, (N)

- $m{x}$ coordonnées d'espace globales, $m{x} = \left\langle x_1 \quad x_2 \right\rangle$
- \mathbf{y} coordonnées d'espace locales, $\mathbf{y} = \langle y_1 \quad y_2 \rangle$
- *Y* cellule unitaire, $Y = (0, 1) \times (0, 1)$
- α amplitude des rugosités, (m)
- \widetilde{lpha} amplitude adimensionnée, $\widetilde{lpha}=rac{lpha}{h_{\min}}$
- ε paramètre inversement proportionnel au nombre de périodes, $\varepsilon = \frac{1}{n_p}$
- Φ fonction de dissipation visqueuse, $W.m^{-3}$
- η constante physique due à la présence des couples de contraintes, (N.s)
- λ longueur d'onde des rugosités, (m)
- λ_{x_1} , λ_{x_2} longueurs d'onde des rugosités suivant les directions x_1 et x_2 , (m)
- Λ constante, $\Lambda = 6 \mu U$, *Pa.m*
- ρ masse volumique du lubrifiant, $kg.m^{-3}$
- μ viscosité dynamique du lubrifiant, (*Pa.s*)
- $\vec{\nabla}_x(\bullet)$ opérateur différentiel, $\vec{\nabla}_x(\bullet) = \left\langle \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_2} \right\rangle$
- $\vec{\nabla}_{y}(\bullet)$ opérateur différentiel, $\vec{\nabla}_{y}(\bullet) = \left\langle \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_{1}} \quad \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_{2}} \right\rangle$
- $\vec{\nabla}(\bullet)$ gradient de la fonction (\bullet) , $\vec{\nabla}(\bullet) = \vec{\nabla}_x(\bullet) + \varepsilon^{-1}\vec{\nabla}_y(\bullet)$
- $\vec{\nabla}$ opérateur de divergence
- $(\widetilde{\bullet})$ quantité adimensionnée
- $(\vec{\bullet})$ quantité vectorielle
- (•) valeur moyenne
- $\langle \rangle$ vecteur ligne, $\langle \rangle \equiv \{\}^T$

Chapitre VI

Théorie de la lubrification hydrodynamique en régime turbulent :

Application aux paliers cylindriques rugueux

VI.1 Introduction

La théorie de la lubrification hydrodynamique en régime laminaire, exposée précédemment, suppose qu'à l'intérieur du fluide en écoulement les forces d'inertie sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression. Dans le cas d'un palier hydrodynamique, ces forces deviennent prépondérantes lorsque la viscosité cinématique du fluide est faible (eau, mercure,.....), les jeux de fonctionnement importants ou la vitesse linéaire de l'arbre en rotation élevée. C'est le cas des paliers lisses des grandes turbomachines modernes dont le diamètre peut dépasser un mètre, c'est aussi le cas des paliers de certaines pompes de centrales nucléaires. Lorsque les forces d'inertie atteignent une certaine valeur, elles modifient la structure de l'écoulement qui devient graduellement turbulent figure VI.1. En effet, lorsque le nombre de Reynolds, qui est le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité exercées sur une particule de fluide, augmente le régime d'écoulement devient non laminaire ou turbulent. Dans le cas des paliers hydrodynamiques, on rencontre également un autre régime non laminaire appelé régime des tourbillons de Taylor qui est un régime de transition figure VI.2. La turbulence est un mouvement irrégulier dans lequel les différentes propriétés de l'écoulement telles que la vitesse et la pression varient de façon aléatoire en fonction du temps et de l'espace. Il est à noter que la turbulence est parfois utile dans certaines applications technologiques car elle favorise les processus de mélange (chambre de combustion d'un moteur à combustion interne,.....) ainsi que les transferts de chaleur et/ou de masse.

En général, un écoulement turbulent peut être caractérisé par les propriétés suivantes :

- L'écoulement est tridimensionnel (3-D) et instationnaire
- Le vecteur vitesse varie de façon aléatoire en module et en direction
- L'écoulement contient un grand nombre de tourbillons de tailles très variées.

En régime d'écoulement turbulent, les équations de Navier-Stokes présentées dans le chapitre précédent sont toujours valables. On se limitera au cas d'un palier lubrifié par un fluide incompressible en écoulement isotherme et stationnaire.



Fig. VI.1 un bel exemple d'un écoulement (jet) turbulent (éruption volcanique)

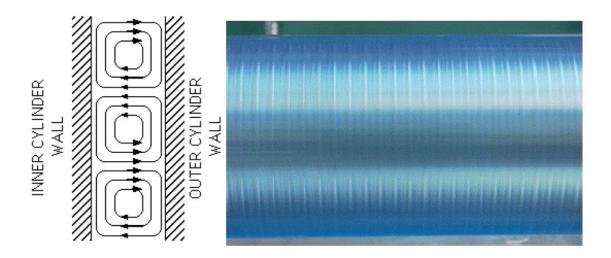


Fig. VI.2 Tourbillons de Taylor pour un écoulement entre deux cylindres concentriques tournants

Différentes approches plus ou moins empiriques ont été proposées dans la littérature technique. Elles peuvent être classées en deux catégories :

- méthodes basées sur la théorie de longueur de mélange de Prandtl;
- méthodes basées sur des considérations expérimentales.

VI.2 Approche utilisant la longueur de mélange

Rappelons que la turbulence étant un phénomène aléatoire, toute grandeur physique $g(x_1, x_2, x_3, t)$ qui décrit l'écoulement figure VI.3, présente une fluctuation $g'(x_1, x_2, x_3, t)$ qui, si l'écoulement est stationnaire, se situe autour d'une valeur moyenne $\overline{g}(x_1, x_2, x_3)$. On aura donc :

$$g(x_1, x_2, x_3, t) = \overline{g}(x_1, x_2, x_3) + g'(x_1, x_2, x_3, t)$$
(VI.1)

tel que $g' \ll \overline{g}$

où:

$$\overline{g} = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} g dt \right)$$
 (VI.2)

et

$$\overline{g}' = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} g' dt \right) = 0$$

La décomposition (**VI**.1) qui est due à Osborne Reynolds, ainsi que la définition de la valeur moyenne selon (**VI**.2) s'appliquent donc uniquement pour les écoulements qui sont en moyenne stationnaires.

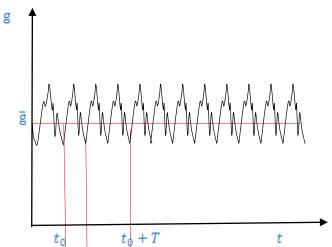


Fig. VI.3 Variation instantanée d'une grandeur physique de l'écoulement (vitesse)

VI.3 Equations de Reynolds

On considère l'écoulement turbulent d'un fluide newtonien et incompressible ($\rho = \rho_0 = \bar{\rho}$) en régime permanent $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$. En régime turbulent, on a deux écoulements séparés : moyen et de fluctuation ou d'agitation. On se propose de déterminer les équations du mouvement moyen :

VI.3.1 Equation de continuité pour un fluide incompressible :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{VI.3}$$

où *i=1,2,3*

En prenant la moyenne, on obtient :

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0$$
 et $\frac{\partial \overline{u}_i'}{\partial x_i} = 0$ (VI.4)

VI.3.2 Equations dynamiques ponctuelles:

Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\rho_0 \gamma_i = \rho_0 f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}$$
 $i, j = 1, 2, 3$ (VI.5)

$$o\grave{\mathbf{u}}: \gamma_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i u_j \right) - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i u_j \right) \text{ en vertu de l'équation. (III.3)}$$

et $\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ qui est le tenseur des contraintes ou tensions visqueuses.

En prenant la moyenne des équations (VI.5), on trouve :

$$\rho_{o}\bar{\gamma}_{i} = \rho_{o}\bar{f}_{i} - \frac{\partial\bar{p}}{\partial x_{i}} + \frac{\partial\bar{\tau}_{ij}}{\partial x_{i}}$$

Soit:

$$\rho_{O}\bar{\gamma}_{i} = \rho_{O}\bar{f}_{i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_{i}} + \frac{\partial}{\partial x_{i}} (\bar{\tau}_{ij} - \rho_{O}\bar{u'_{i}u'_{j}})$$
(VI.6)

avec
$$\overline{\gamma}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u}_i \overline{u}_j \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u}_i' u_j' \right)$$

Posons:
$$\tau_{ij}^* = \bar{\tau}_{ij} - \rho_0 u'_i u'_j = \bar{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^{(t)}$$

 τ_{ij}^* est le tenseur des contraintes totales incluant les contributions dues à la viscosité du fluide et à la turbulence, $\bar{\tau}_{ij}$ le tenseur des contraintes visqueuses dues à la viscosité du fluide et $\tau_{ij}^{(t)} = -\rho_0 u'_i u'_j$ le tenseur de Reynolds regroupant les tensions de turbulence.

Dans un système cartésien et en utilisant la notation classique, on a :

- Contraintes totales

$$\tau_{xx}^* = 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho_O \bar{u}'^2; \tau_{xy}^* = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho_O \overline{u'v'}$$

$$\tau_{yy}{}^* = 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \rho_0 \bar{v}'^2; \tau_{yz}{}^* = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) - \rho_0 \overline{v'w'}$$

$$\tau_{zz}^* = 2\mu \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} - \rho_0 \overline{w}'^2$$
, $\tau_{zx}^* = \mu \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} \right) - \rho_0 \overline{u'w'}$

- Composantes du tenseur de Reynolds

$$\tau_{ij}{}^{(t)} = -\rho_{o} \left(\frac{\bar{u}^{\prime 2}}{u^{\prime}v^{\prime}} \frac{u^{\prime}v^{\prime}}{v^{\prime}w^{\prime}} \frac{u^{\prime}w^{\prime}}{\bar{v}^{\prime}w^{\prime}} \frac{v^{\prime}w^{\prime}}{\bar{w}^{\prime 2}} \right)$$

Les contraintes on tensions de Reynolds sont des quantités mesurables.

Par conséquent, les équations de Reynolds s'écrivent :

$$\rho_{o}\overline{\gamma_{i}} = \rho_{o}\overline{f_{i}} + \frac{\partial \tau^{*}_{ij}}{\partial x_{i}} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_{i}}$$
(VI.7)

En tout, on a quatre équations (trois équations de Reynolds (**VI**.7) + l'équation de continuité (**VI**.4)) et dix inconnues : \bar{u}_{ij} , \bar{p}_i , τ_{ij} (t); t, t = 1, 2, 3

Nous voyons donc que dans le cas d'un mouvement moyen, les équations dynamiques et l'équation de continuité sont absolument analogues aux équations dynamiques et à l'équation de continuité dans le cas d'un mouvement laminaire à condition d'ajouter aux tensions visqueuses les tensions de turbulence.

Remarques:

- en régime laminaire: $\bar{p} = p, \bar{u_i} = u_i \ et \ \rho_0 \ \bar{u'_i u'_j} = 0.$
- en général, $\left| \rho_0 \overline{u'_{\iota} u'_{J}} \right| \gg \left| \overline{ au_{\iota J}} \right| \to au^*_{ij} \approx \rho_0 \overline{u'_{\iota} u'_{J}} = au_{ij}^{(t)}$
- les fluctuations superposées au vecteur vitesse moyen sont (3-D) même si l'écoulement moyen est mono ou (2-D). Donc, la turbulence est toujours (3-D)
- on définit l'intensité de la turbulence par l'expression :

$$(u'^2 + v'^2 + w'^2)^{\frac{1}{2}}$$

Cette même expression élevée au carré et multipliée par $\frac{\rho_0}{2}$ exprime l'énergie cinétique de la turbulence, notée k

L'apparition des tensions de Reynolds dans les équations du mouvement pose un problème de « fermeture » car on obtient plus d'inconnues que d'équations. On dit alors que l'on a un système d'équations « ouvert ». Pour fermer le système d'équations, il faut élaborer un modèle de turbulence dont le but serait le développement d'équations supplémentaires pour les tensions de Reynolds. La littérature nous propose plusieurs modèles de turbulence. Les modèles les plus utilisés sont ceux de Boussinesq, de Prandtl et le modèle k, ɛ. Ces modèles sont des modèles semi-empiriques basés sur des résultats expérimentaux.

VI.4 Modèle de Boussinesq

En 1877, Boussinesq a proposé le premier modèle mathématique de la turbulence. La relation entre les tensions de Reynolds et le gradient de la vitesse moyenne est de la forme :

$$\tau_{ij}^{(t)} = -\rho_0 \overline{u'_i u'_j} = \rho_0 \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$$
 (VI.8a)

Le tenseur de contraintes s'écrit alors :

$$\sigma_{ij} = -\bar{p}\,\delta_{ij} + \mu\left(1 + \frac{v_t}{v}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{VI.8b}$$

Cette équation est analogue à l'équation constitutive pour un écoulement laminaire.

Dans l'équation (**VI**.8), μ est la viscosité moléculaire et ν_t la viscosité turbulente ou viscosité tourbillonnaire (the eddy viscosity) qui ne dépend pas des propriétés du fluide. ν_t est reliée à des quantités mesurables de l'écoulement turbulent.

Prandtl [45] exprime v_t sous la forme :

$$v_t = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dv} \right| \tag{VI.9}$$

où *l* est dénommée longueur de mélange de Prandtl (mixing length).

La valeur absolue est introduite afin d'assurer $v_t \geq 0$.

VI.5 Equations de Reynolds pour un écoulement en film mince

En plus des hypothèses classiques de la mécanique des films minces utilisées dans le chapitre précédent (forces massiques négligées, fluide isovisqueux, ...), on pose que les gradients, par rapport à x_1 et x_3 , des tensions de Reynolds $u'_i u'_j$ sont négligeables devant ceux par rapport à x_2 (coordonnée dirigée suivant l'épaisseur du film). Dans ces conditions, il vient :

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_{i}} = \mu \frac{\partial^{2} \overline{u}_{i}}{\partial x_{2}^{2}} + \frac{\partial}{\partial x_{2}} \left(-\rho_{0} \overline{u'_{i} u'_{2}} \right) \qquad i = 1,3$$

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_{2}} = \frac{\partial}{\partial x_{2}} \left(-\rho_{0} \overline{u'_{2}}^{2} \right) \qquad (VI.10)$$

En intégrant, la deuxième équation du système (VI.10), on obtient :

$$\overline{p}(x_1, x_2, x_3, t) = -\rho_0 \overline{u}_2^{\prime 2} + p_{II}(x_1, x_3, t) = p_I(x_1, x_2, x_3, t) + p_{II}(x_1, x_3, t)$$

Les équations (VI.10) indiquent que les vitesses moyennes du fluide \overline{u}_1 et \overline{u}_3 sont influencées par les gradients

de pression moyenne
$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1}$$
 et $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_3}$ et par conséquent $\frac{\partial p_{II}}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial p_{II}}{\partial x_3}$, car $\frac{\partial p_{I}}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial p_{I}}{\partial x_3}$ sont de l'ordre de h/L (L

étant une longueur caractéristique du contact) par rapport aux autres termes des équations (VI.10). Le terme p_I peut être négligé tant pour la distribution de vitesse que la distribution de pression puisque la pression est importante aux limites où $u_2' = p_I = 0$. Par conséquent $\overline{p} = p_{II}(x_1, x_3, t)$ qui est indépendante de la variable x_2 ; c'est-à-dire le gradient selon l'épaisseur du film $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_2}$ est identiquement nul.

Il reste donc:

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\rho_0 \overline{u_i' u_3'} \right) \tag{VI.11}$$

Dans ce qui suit, l'indice i ne prendra que les valeurs 1 et 3.

VI.5.1 Répartition des vitesses moyennes

En intégrant une première fois par rapport à x_3 les équations (VI.11), il vient :

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} x_2 + C_i(x_1, x_2) = \mu \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_2} - \rho_0 \overline{u_i' u_2'}$$
(VI.12)

où C_i sont des constantes d'intégration définies par les conditions aux limites sur la vitesse de l'écoulement :

pour
$$x_2=0$$
 $\overline{u}_1=\overline{u}_3=0$
$$\text{pour } x_2=h \qquad \overline{u}_1=V; \quad \overline{u}_3=0 \qquad \qquad \text{(VI.13)}$$

L'intégration de l'équation (**VI**.12) nécessite de poser de nouvelles hypothèses sur la valeur des tensions de Reynolds. D'après [46 à 55], on peut écrire :

$$-\rho_0 \overline{u_i' u_2'} = \rho_0 l^2 \left| \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_2} \right| \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_2}$$
 (VI.14)

où l, fonction de x_2 , est la longueur du mélange. En général, on pose :

$$l = kx_2 \quad \text{pour } 0 < x_2 < \frac{h}{2}$$

$$l = k(h - x_2) \quad \text{pour } \frac{h}{2} < x_2 < h$$
(III.15)

Les fonctions suivantes ont toutefois aussi été utilisées :

$$l^{2} = k^{2}x_{2}(h - x_{2})$$

$$l = kx_{2}(1 - \frac{x_{2}}{h})$$

$$l = \frac{k}{\pi}\sin(\pi \frac{x_{2}}{h})$$
(III.16)

Dans toutes ces expressions, k est une constante dont la valeur peut varier entre 0,2 et 0,4.

Tipei, Constantinescu et Galetuse ont montré que le champ de vitesse variait relativement peu d'une loi à l'autre et ont ainsi justifié l'emploi de la relation linéaire (VI.15).

En utilisant le changement de variable défini par :

$$Y = \frac{x_2}{h}; L = \frac{l}{h} \text{ et } \overline{U}_i = \frac{\overline{u}_i}{V}$$
 (VI.17)

Les équations (VI.12) compte tenu des relations (VI.14), s'écrivent :

$$\Re_{h}L^{2}\left|\frac{\partial \overline{U}_{i}}{\partial Y}\right|\frac{\partial \overline{U}_{i}}{\partial Y} + \frac{\partial \overline{U}_{i}}{\partial Y} + \overline{B}_{i}Y + D_{i} = 0$$
(VI.18)

où $\Re_h = \frac{\rho_0 V h}{\mu} = \frac{V h}{V}$ est le nombre de Reynolds local de l'écoulement et $\overline{B}_i = -\frac{h^2}{\mu V} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}$ est un nombre sans

dimension qui caractérise le gradient de pression.

Compte tenu du changement de variable (VI.17), les conditions aux limites (VI.13) deviennent :

pour Y=0
$$\overline{U}_1 = \overline{U}_3 = 0$$

$$\overline{U}_1 = 1 \quad \text{et} \quad \overline{U}_3 = 0$$
 (VI.19)

Les équations (VI.18) peuvent être intégrées soit analytiquement en utilisant les fonctions elliptiques de Weierstrass ou numériquement . Constantinescu a été amené, pour trouver une solution analytique, à négliger près des parois, le terme de tension turbulente $\Re_h L^2 \left| \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial Y} \right| \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial Y}$ et loin des parois le terme de tension visqueuse $\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial Y}$.

<u>Frêne [56, 57]</u> a effectué, sans approximation, l'intégration numérique de l'équation (**VI**.18) pour différentes valeurs des paramètres \overline{B}_1 et \mathfrak{R}_h . La comparaison des profils de vitesses à l'intérieur du film obtenus numériquement avec ceux calculés analytiquement par Constantinescu pour un nombre de Reynolds de 10^3 , a montré que les écarts ne sont plus négligeables lorsque le gradient de pression moyenne est différent de zéro.

VI.5.2 Répartition des pressions moyennes : Méthode analytique

Constantinescu a montré que les relations entre les coefficients \overline{B}_i et les vitesses moyennes dans une section \overline{w}_i définies par $\overline{w}_i = \frac{1}{h} \int_0^h \overline{u}_i dx_3$ pouvaient être approchées par les fonctions linéaires suivantes :

$$\overline{B}_1 = \eta_1 \left(\frac{\overline{w}_1}{V} - \frac{1}{2} \right)$$
 et $\overline{B}_3 = \eta_3 \frac{\overline{w}_3}{V}$

où les coefficients η_i sont approchés par les expressions suivantes :

$$\eta_1 = 12 + 0.53 (k^2 \Re_h)^{0.725}$$
 et $\eta_3 = 12 + 0.296 (k^2 \Re_h)^{0.65}$

C. W. Ng [58] propose pour η_1 l'expression : $\eta_1 = 12 + 0.00725 \Re_h^{-1.003}$

Ces relations permettent de déterminer les vitesses moyennes \overline{w}_i et de les reporter dans l'équation de continuité qui, en régime permanent, peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (h\overline{w_i}) = 0$$

On obtient l'équation de pression :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h^3}{\mu \eta_1} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h^3}{\mu \eta_3} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_3} \right) = \frac{V}{2} \frac{\partial h}{\partial x_1}$$
(VI.20)

L'équation (VI.20) a la même forme que l'équation de Reynolds laminaire ; elle peut être intégrée en utilisant les mêmes méthodes et en tenant compte des mêmes conditions aux limites.

Les répartitions de pression dans le film obtenues à partir de l'intégration de l'équation (**VI**.20) pour k=0.16 et k=0.4 ne sont pas en accord avec le profil de pression obtenu par expérimentation même si l'allure des différentes courbes est semblable. Ceci est dû aux nombreuses simplifications introduites pour la dérivation de l'équation (**VI**.20). En effet, l'obtention de cette équation n'est possible que moyennant une linéarisation des relations qui lient les vitesses moyennes \overline{w}_i aux coefficients \overline{B}_i de gradient de pression. D'autre part, les paramètres η_i ne dépendent pas seulement du nombre de Reynolds, mais aussi du gradient de pression.

Selon Frêne, l'emploi de la longueur de mélange doit être considéré avec beaucoup de réserves ; cette notion étant pratiquement exclue des études actuelles relatives aux écoulements turbulents classiques (couches limites, ...).

VI.6 Approche basée sur des considérations empiriques

A partir de relations empiriques, de nombreux chercheurs ont tenté de déterminer le fonctionnement d'un palier en régime turbulent. C.W. Ng et C.H.T. Pan [59] présentent une approche qui débouche sur des résultats plus satisfaisants. Cette théorie est basée sur la notion de viscosité turbulente (eddy viscocity) v_t introduite par Boussinesq et permettant de relier les tensions de Reynolds aux taux de déformation de l'écoulement moyen par les relations écrites en utilisant la notation classique :

$$-\overline{u'v'} = v_t \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} \right)$$

$$-\overline{v'w'} = v_t \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} \right)$$
(VI.21)

où
$$(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3); (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) \equiv (\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$$
 et $(u', v', w') \equiv (u'_1, u'_2, u'_3)$

Les contraintes totales τ_{xy}^* et τ_{yz}^* s'écrivent alors, dans le cas où seuls les gradients de vitesse moyenne par rapport à y sont importants :

$$\tau_{xy}^* = \mu \left(1 + \frac{V_t}{V} \right) \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \text{ et } \tau_{yz}^* = \mu \left(1 + \frac{V_t}{V} \right) \frac{\partial \overline{w}}{\partial y}$$
 (VI.22)

Dans la littérature, il existe plusieurs relations permettant d'exprimer la viscosité turbulente. En général, on utilise la relation empirique de Reichardt :

$$\frac{v_t}{v} = k \left(y^+ - \delta^+ t h \left(\frac{y^+}{\delta^+} \right) \right) \quad \text{avec } k = 0, 4 \text{ et } \delta^+ = 10, 7$$
(VI.23)

y⁺ coordonnée réduite définie à partir des lois universelles de variation de vitesse moyenne au voisinage d'une paroi.

Ces relations permettent de calculer les contraintes de cisaillement à l'intérieur du film en fonction du gradient de vitesse. Dans le cadre de la théorie des films minces, les gradients de vitesse sont donnés par :

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \rho_0 \overline{u'v'} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} - \rho_0 \overline{v'w'} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} \right]$$
(VI.24)

A partir de ces équations et compte tenu des conditions aux limites Ng et Pan déterminent les vitesses moyennes :

$$\overline{u} = \frac{1}{\mu} \left[\tau_{xy} \left(\frac{h_2}{y} \right) \int_0^y \frac{dy'}{1 + \frac{V_t}{V}} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} \int_0^y \frac{(y' - \frac{h_2}{y}) dy'}{1 + \frac{V_t}{V}} \right]
\overline{w} = \frac{1}{\mu} \left[\tau_{yz} \left(\frac{h_2}{y} \right) \int_0^y \frac{dy'}{1 + \frac{V_t}{V}} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \int_0^y \frac{(y' - \frac{h_2}{y}) dy'}{1 + \frac{V_t}{V}} \right]$$
(VI.25)

où $\tau_{xy}(\frac{h}{2})$ et $\tau_{yz}(\frac{h}{2})$ sont des constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions limites pour y=h.

Ces expressions reportées dans l'équation de continuité permettent après intégration à travers le film d'obtenir, en régime permanent, l'équation de Reynolds turbulente :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h^3}{\mu} G_{x_1} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h^3}{\mu} G_{x_2} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_2} \right) = \frac{V}{2} \frac{\partial h}{\partial x}$$
 (VI.26)

Dans l'équation (III.26), G_{x_1} et G_{x_2} sont deux fonctions qui dépendent non seulement de l'épaisseur du film et du nombre de Reynolds local de l'écoulement, mais aussi des gradients de pression circonférentiel et axial. Ng et Pan obtiennent les fonctions suivantes :

$$G_{x_1} = \int_0^1 d\overline{y} \int_0^{\overline{y}} \frac{\frac{1}{2} - \eta}{f_c(\eta)} \left(1 - \frac{g_c(\eta)}{f_c(\eta)} \right) d\eta$$

$$G_{x_3} = \int_0^1 d\overline{y} \int_0^{\overline{y}} \frac{\frac{1}{2} - \eta}{f_c(\eta)} d\eta$$
(VI.27)

où les fonctions f_c et g_c sont définies par les relations suivantes :

$$f_c(\eta) = 1 + k \left(\eta h_c^+ - \delta^+ t h \left(\eta \frac{h_c^+}{\delta^+} \right) \right) \text{ et } g_c(\eta) = \frac{k}{2} \eta h_c^+ t h^2 \left(\eta \frac{h_c^+}{\delta^+} \right)$$

avec $\eta = \frac{y}{h}$ variable sans dimension, $h_c^+ = \frac{h}{v} \sqrt{\frac{|\tau_c|}{\rho_0}}$ qui est la tension turbulente de Couette tel que $|\tau_c| = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2}$.

Dans une analyse comportant moins d'hypothèses restrictives <u>H. G. Elrod, G. W. Ng [60]</u> obtiennent les fonctions suivantes :

$$G_{x_{1}} = J(1)\frac{\bar{I}}{I(1)} - \bar{J} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{\bar{I}}{I(1)}\frac{hV}{v}}{\frac{h^{3}}{\mu v}\frac{\partial p}{\partial x}}$$

$$(VI.28)$$

$$G_{x_{3}} = J(1)\frac{\bar{I}}{I(1)} - \bar{J}$$

où
$$I(\eta) = \int_{0}^{\eta} \frac{d\eta}{1 + \frac{V_t}{V}}$$
; $J(\eta) = \int_{0}^{\eta} \frac{\eta d\eta}{1 + \frac{V_t}{V}}$, et \bar{I} et \bar{J} sont respectivement les moyennes de 0 à 1 de $I(\eta)$ et $J(\eta)$.

En considérant séparément les écoulements suivant x_1 et x_3 , <u>Constantinescu</u> démontre que, compte tenu de la sous couche laminaire, les vitesses sont des fonctions quasi-linéaires des gradients de pression. Il propose alors pour les fonctions G_{x_0} et G_{x_0} :

- Ecoulement de Poiseuille dû au gradient de pression :

$$G_{x_1} = G_{x_3} = \frac{6.8}{\left(\frac{V_m h}{V}\right)^{0.681}} \text{ où } V_m = \sqrt{u_m^2 + w_m^2} \text{ : vitesse moyenne du fluide}$$
(VI.29)

- Ecoulement de Couette dû à la vitesse de rotation :

$$G_{x_1} = \frac{1}{(12 + 0.0136\Re_h^{0.9})}$$

$$G_{x_3} = \frac{1}{(12 + 0.0043\Re_h^{0.96})}$$

$$\Re_h = \frac{Vh}{V}$$
(VI.30)

En régime laminaire, les relations (VI.30) deviennent :

$$G_{x_i} = \frac{1}{12}, i = 1, 3$$

Il convient de noter que par des approches différentes, <u>Constantinescu en 1959</u>, et Ng et Pan en 1964 obtiennent la même équation (**VI**.26). Les valeurs numériques des coefficients G_{x_1} et G_{x_3} qui s'expriment en fonction de paramètres différents sont très voisines suivant que l'on utilise le modèle de Constantinescu ou d'Elrod.

Les expressions (VI.30) pourraient être utilisées jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de 5×10^4 et permettraient de déterminer avec une certaine précision les caractéristiques d'un palier fonctionnant en régime turbulent. Pour une meilleure prédiction des performances d'un palier hydrodynamique, il faut connaître avec plus de précision les fonctions de turbulence G_{x_i} . Pour cela, on préfère pratiquement les lois empiriques de viscosité turbulente à la notion périmée de longueur de mélange, mais rien d'affirmer que ces lois déterminées pour des écoulements de grandes dimensions, soient toujours valables dans le cas des films minces. Il faut donc mesurer dans un film turbulent les différentes caractéristiques de la turbulence telles que les tensions de Reynolds, le profil des vitesses à l'aide d'anémomètres ainsi que l'intensité de la turbulence.

VI.7 Transition entre les différents régimes d'écoulement

Entre le régime turbulent, qui existe dans les paliers pour des nombres de Reynolds ou de Taylor élevés, et le régime laminaire, on distingue trois types d'écoulements :

 les forces d'inertie ou centrifuges sont faibles, mais non négligeables devant les forces de viscosité. Le comportement des paliers qui fonctionnent dans ces conditions ne peut plus être décrit par la théorie laminaire classique;

- 2) les forces d'inertie sont du même ordre que les forces de viscosité. Il se produit alors à l'intérieur du film un écoulement secondaire communément connu sous le nom de tourbillons de Taylor (Taylor's vortices) [61];
- 3) les forces d'inertie sont importantes devant les forces de viscosité. Autrement dit, le nombre de Reynolds de l'écoulement, qui exprime le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité agissant sur une particule de fluide, dépasse de loin certaines valeurs dites critiques. Dans ces conditions, on atteint le régime turbulent.

VI.7.1 Transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor

Depuis les travaux de G. I. Taylor, on sait que pour un écoulement entre deux cylindres coaxiaux tournants (cas d'un palier non chargé), les tourbillons se développent dans le film lorsque le nombre de Taylor moyen défini par :

$$T_{m} = \frac{\rho_{0}VC}{\mu} \sqrt{\varsigma_{R}} = \Re_{m} \sqrt{\varsigma_{R}}$$
 (VI.31)

atteint la valeur de 41,2. Ce nombre sans dimension exprime le rapport des forces centrifuges aux forces de viscosité agissant sur une particule de fluide. Cette valeur donne dans le cas du palier non chargé la transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor. Dans l'expression du nombre de Taylor, ρ₀ et μ représentent la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide en écoulement, V la vitesse linéaire de l'axe (arbre) en rotation, C le jeu radial, R le rayon du palier et \mathfrak{R}_m le nombre de Reynolds moyen de l'écoulement. L'apparition de ces tourbillons figure VI.2 qui forment des tores régulièrement superposées suivant l'axe de rotation du palier est liée aux forces d'inertie engendrées par la rotation de l'arbre. Précisons que dans le cas où l'alésage (coussinet) est en rotation autour d'un arbre fixe, les instabilités de Taylor n'existent pas. Dans le cas du palier chargé, c'est-à-dire pour un écoulement entre deux cylindres excentrés, il a été remarqué que le nombre de Taylor critique au-delà duquel la transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor se produit varie avec l'excentricité relative. Malgré de nombreuses études expérimentales qui avaient pour but de déterminer la valeur du nombre de Taylor critique en fonction de l'excentricité relative, il est encore difficile, pour un jeu relatif C/R donné, de connaître avec précision la variation du nombre de Taylor critique en fonction de l'excentricité relative $T_c(\varepsilon)$ tel que $\varepsilon = e/C$. Il est donc nécessaire, pour déterminer la transition, d'effectuer des essais expérimentaux dans les conditions réelles de fonctionnement d'un palier hydrodynamique.

Selon <u>Frêne</u>, la transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor dans un palier chargé s'effectue localement dès que le nombre de Taylor local défini par :

$$T_h = \frac{\rho_0 Vh}{\mu} \sqrt{\frac{h}{R}} = \Re_h \sqrt{\frac{h}{R}}$$
 (VI.32)

atteint la valeur critique donnée par la relation semi-empirique :

$$T_c = 63.3\varepsilon^2 - 38\varepsilon + 41.2 \tag{VI.33}$$

VI.7.2 Transition entre le régime des tourbillons de Taylor et le régime turbulent

On admet que le régime turbulent peut être établi dans un palier chargé lorsque le nombre de Taylor local atteint la valeur de $2T_c$.

A partir de l'équation de Reynolds turbulente (VI.26) et des relations (VI.30), on est en mesure de calculer la pression engendrée dans le film et la charge que peut supporter un palier en régime turbulent. Pour le calcul de la force ou du couple de frottement, on utilisera pour la contrainte de cisaillement pariétale, l'expression suivante :

$$\tau_{xy}(y=0,h) = \mp \frac{h}{2} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \frac{\mu V}{h} (1 + 0.0012 \Re_h^{0.94})$$
 (VI.34)

Par ailleurs, les vitesses moyennes de l'écoulement se calculent par :

$$u_{m} = -\frac{h^{2}}{\mu} G_{x_{1}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_{1}} + \frac{V}{2}$$

$$w_{m} = -\frac{h^{2}}{\mu} G_{x_{2}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_{2}}$$
(VI.35)

Les composantes du vecteur débit volumique suivant les directions x et z peuvent se calculer, dans une section du palier, à partir des vitesses moyennes par une simple intégration.

On remarque ainsi que les performances hydrodynamiques (pression, capacité de charge, angle de calage, force ou couple de frottement, débits, ...) d'un palier en régime turbulent peuvent être déterminées en utilisant les mêmes méthodes de calcul qu'en régime laminaire.

VI.8 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation de la théorie de la lubrification hydrodynamique en régime non laminaire en utilisant le modèle mathématique de Boussinesq. Cette théorie a permis de dériver, à partir des équations décrivant un écoulement turbulent, une équation de Reynolds modifiée appelée équation de Reynolds turbulente permettant d'étudier le comportement des paliers hydrodynamiques fonctionnant en régime turbulent pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à 50000. L'intégration de cette équation moyennant certaines conditions limites permet de calculer la répartition de la pression dans le palier.

Dans le chapitre suivant, nous appliquerons le processus d'homogénéisation aux équations de Reynolds écrites en régimes laminaire et turbulent.

CHAPITRE VII

Homogénéisation de l'équation de Reynolds turbulente

VII.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons le processus d'homogénéisation pour l'analyse théorique du problème de lubrification hydrodynamique dans les contacts rugueux fonctionnant en régime turbulent tels que les paliers fluides. Nous supposons, par hypothèse, que la surface stationnaire du contact (coussinet) est rugueuse tandis que la surface mobile (arbre) est parfaitement lisse. Cette hypothèse nous permettra d'utiliser les équations de Reynolds laminaire et turbulente dérivées dans les chapitres 2 et 3 sans la prise en considération du terme transitoire figurant dans le second membre des équations. Pour pouvoir appliquer la technique d'homogénéisation, nous supposerons d'autre part que la distribution des rugosités est périodique sur toute la surface stationnaire du contact. Nous montrerons que le processus d'homogénéisation des équations de Reynolds (2-D) conduit à la résolution de deux problèmes, à savoir :

- un problème local (échelle microscopique) gouverné par trois équations aux dérivées partielles (EDPs) du second ordre dont les inconnues sont des fonctions périodiques locales;
- un problème global (échelle macroscopique) régi par une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est la pression homogénéisée.

Dans le cas d'un palier long où l'écoulement est purement circonférentiel (1-D), les EDPs régissant les deux problèmes deviennent des équations différentielles ordinaires (EDO).

VII.2 Homogénéisation de l'équation de Reynolds turbulente

En utilisant la notation vectorielle, l'équation de Reynolds écrite en régime turbulent dont l'inconnue est la pression hydrodynamique *p* peut s'écrire dans le cas d'un fluide iso-visqueux sous la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla} p \right) = \frac{\mu}{2} \, \vec{\nabla} \cdot \left(h \, \overrightarrow{U} \right) \tag{VII.1}$$

$$\mathbf{avec} \overset{\mathbf{G}}{=} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^3 G_{x_1} & 0 \\ 0 & h^3 G_{x_2} \end{bmatrix}; \quad \vec{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} U_1 + U_2 \\ W_1 + W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$$

 G_{x_i} étant les fonctions de turbulence définies par les relations (VI.30) et $V=\omega R$ la vitesse linéaire de l'arbre suivant la direction x_I .

En notation matricielle, l'équation (VII.1) s'écrit :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_{1}} \quad \frac{\partial}{\partial x_{2}} \right\rangle \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x_{1}} \\ \frac{\partial p}{\partial x_{2}} \end{bmatrix} = \frac{\mu}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{1}} \quad \frac{\partial}{\partial x_{2}} \right\rangle \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$$
(VII.2)

Pour homogénéiser l'équation de Reynolds écrite en régime turbulent (VII.1), nous utilisons le même développement asymptotique de la pression. En limitant le développement de la pression p à l'ordre 1, c'est-à-dire $p_{\varepsilon}(x_1,x_2,y_1,y_2)=p_0(x_1,x_2)+\varepsilon$ $p_1(x_1,x_2,y_1,y_2)$, l'équation de Reynolds (VII.1) prend la forme suivante :

$$\left(\vec{\nabla}_{x} + \varepsilon^{-1}\vec{\nabla}_{y}\right) \bullet \left(\underline{\underline{\mathcal{G}}}\left(\vec{\nabla}_{x} + \varepsilon^{-1}\vec{\nabla}_{y}\right)\left(p_{0} + \varepsilon p_{1}\right)\right) = \frac{\mu}{2}\left(\vec{\nabla}_{x} + \varepsilon^{-1}\vec{\nabla}_{y}\right) \bullet \left(h_{\varepsilon}\vec{U}\right)$$

Soit:

$$\vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{0} \right) + \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{y} p_{1} \right) + \vec{\nabla}_{y} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \varepsilon \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \,$$

Après identification par rapport à ε^{j} (j=-1, 0, 1), nous trouvons les équations suivantes :

- termes en ε^{-1} .

$$\vec{\nabla}_{y} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_{y} p_{1} \right) = \frac{\mu}{2} \vec{\nabla}_{y} \cdot (h \vec{U}) - \vec{\nabla}_{y} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_{x} p_{0} \right)$$
(VII.4)

- termes en ε^0 :

$$\vec{\nabla}_{x} \cdot \left[\underline{\underline{G}} \left(\vec{\nabla}_{x} p_{0} + \vec{\nabla}_{y} p_{1} \right) \right] = \frac{\mu}{2} \vec{\nabla}_{x} \cdot \left(h \vec{U} \right) - \vec{\nabla}_{y} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right)$$
(VII.5)

- termes en ε^1 .

$$\vec{\nabla}_{x} \cdot \left(\vec{G} \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) = 0$$
 (VII.6)

Si $\vec{U} = V\vec{e}_1$, les équations (VII.4) et (VII.5) s'écrivent :

$$\vec{\nabla}_{y} \bullet \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{y} p_{1} \right) = \Lambda \, \frac{\partial h}{\partial y_{1}} - \vec{\nabla}_{y} \bullet \left(\underline{\underline{G}} \, \vec{\nabla}_{x} p_{0} \right) \tag{VII.7}$$

$$\vec{\nabla}_{x} \cdot \left[\underline{\underline{G}} \left(\vec{\nabla}_{x} p_{0} + \vec{\nabla}_{y} p_{1} \right) \right] = \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_{1}} - \vec{\nabla}_{y} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right)$$
(VII.8)

avec cette fois ci $\Lambda = \frac{1}{2} \mu V$.

Pour découpler les équations (VII.4) à (VII.6), nous utilisons la même relation (III.12).

Compte tenu de l'équation (III.30), l'équation (VII.7) s'écrit :

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{y}} \bullet \left[\underline{\underline{G}} \overline{\nabla}_{\mathbf{y}} (v_1 \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial p_0}{\partial x_2} + v_3) \right] = \Lambda \frac{\partial h}{\partial y_1} - \overline{\nabla}_{\mathbf{y}} \bullet \left[G_{11} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} \vec{e}_1 + G_{22} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \vec{e}_2 \right]$$

 $\vec{\nabla}_y \cdot \left(\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y \, v_1 \right) = -\vec{\nabla}_y \cdot (G_{11} \, \vec{e}_1)$ Par identification, nous trouvons les équations différentielles suivantes :

$$\vec{\nabla}_{y} \cdot \left(\underline{G} \vec{\nabla}_{y} \nu_{2} \right) = -\vec{\nabla}_{y} \cdot (G_{22} \vec{e}_{2})$$

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{y}} \bullet \left(\mathbf{\underline{G}} \vec{\nabla}_{\mathbf{y}} \, \mathbf{v}_{3} \right) = \Lambda \, \frac{\partial h}{\partial y_{1}}$$

ou encore:

$$\overline{\nabla}_{y} \cdot \left(\underline{\underline{G}} \, \overline{\nabla}_{y} \, \nu_{1}\right) = -\frac{\partial G_{11}}{\partial \nu_{1}} \qquad \text{sur } Y = (0,1) \times (0,1)$$
 (VII.9)

$$\overline{\nabla}_{y} \bullet \left(\underline{\underline{G}} \, \overline{\nabla}_{y} \, \nu_{2}\right) = -\frac{\partial G_{22}}{\partial \nu_{2}} \qquad \text{sur } Y = (0,1) \times (0,1)$$
(VII.10)

$$\vec{\nabla}_{y} \bullet \left(\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_{y} \nu_{3} \right) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial v_{1}}$$
 sur $Y = (0,1) \times (0,1)$

L'intégration de l'équation (VII.8) sur la cellule (Y) conduit à :

$$\int_{Y} \left[\vec{\nabla}_{y} \bullet \left(\underline{\boldsymbol{G}} \vec{\nabla}_{x} p_{1} \right) + \vec{\nabla}_{x} \bullet \left(\underline{\boldsymbol{G}} \vec{\nabla}_{y} p_{1} \right) + \vec{\nabla}_{x} \bullet \left(\underline{\boldsymbol{G}} \vec{\nabla}_{x} p_{0} \right) - \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_{1}} \right] dY = 0$$
(VII.12)

avec
$$\int_{Y} \vec{\nabla}_{y} \cdot (\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_{x} p_{1}) dY = 0$$
 et $dY = dy_{1} dy_{2}$

L'équation (IV.12) se réduit à :

$$\int_{Y} \left(\vec{\nabla}_{x} \bullet \left[\underbrace{\vec{\mathcal{G}}}_{Y} \vec{\nabla}_{y} \left(\frac{\partial p_{0}}{\partial x_{1}} v_{1} + \frac{\partial p_{0}}{\partial x_{2}} v_{2} + v_{3} \right) \right] + \vec{\nabla}_{x} \bullet \left(\underbrace{\vec{\mathcal{G}}}_{X} \vec{\nabla}_{x} p_{0} \right) - \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_{1}} \right) dY = 0$$
(VII.13)

L'équation (VII.13) peut s'écrire aussi :

$$\vec{\nabla}_x \bullet \left[\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \int_{Y} \left(\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y v_1 + G_{11} \vec{e}_1 \right) dY + \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \int_{Y} \left(\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_y v_2 + G_{22} \vec{e}_2 \right) dY \right] =$$

$$\vec{\nabla}_{x} \bullet \int_{Y} \left\{ \begin{cases} \Lambda h \\ 0 \end{cases} - \left\{ \begin{cases} G_{11} \stackrel{\partial V_{3}}{/} \partial y_{1} \\ G_{22} \stackrel{\partial V_{3}}{/} \partial y_{2} \end{cases} \right\} dY$$
(VII.14)

Soit par conséquent :

$$\vec{\nabla}_{x} \bullet (\underline{A(x)} \vec{\nabla}_{x} p_{0}) = \vec{\nabla}_{x} \bullet \theta(x) \text{ sur } (\Omega)$$
(VII.15)

Les coefficients des matrices \boldsymbol{A} et $\boldsymbol{\theta}$ sont définis par :

$$a_{11} = \int_{Y} G_{11} \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) dY \; ; \quad a_{12} = \int_{Y} G_{11} \frac{\partial v_2}{\partial y_1} dY \; ; \quad a_{21} = \int_{Y} G_{22} \frac{\partial v_1}{\partial y_2} dY \; ; \quad a_{22} = \int_{Y} G_{22} \left(1 + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \right) dY$$

$$\theta_1 = \int_{Y} \left(\Lambda h - G_{11} \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \right) dY \; ; \quad \theta_2 = -\int_{Y} G_{22} \frac{\partial v_3}{\partial y_2} dY$$
 (VII.16)

L'équation (VII.38) peut aussi s'écrire sous la forme développée comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_{11} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_{21} \frac{\partial p_0}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial p_0}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \text{ sur } (\Omega)$$
(VII.17)

Dans le cas lisse, c'est-à-dire : $h(\mathbf{x}) = h_0(\mathbf{x})$, l'équation (**VII**.17) se réduit à l'équation de Reynolds turbulente classique, i.e. :

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (h_0(x)) - \vec{\nabla}_x \bullet \left(\underline{\underline{G}} \vec{\nabla}_x p_0 \right) = 0$$

$$\underline{\underline{G}} = h_0^3 \left(x \begin{vmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{vmatrix} \right)$$
(VII.18)

Dans le cas d'un contact plan (écoulement 1-D), les équations locales et globales se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(G_{11} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial G_{11}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(G_{11} \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial \mathbf{v}} \right) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}}$$
(VII.19)

$$\frac{d\theta(x)}{dx} - \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dp_0}{dx}\right) = 0$$
(VII_{.20)}

οù

$$\theta(\underline{x}) = \int_{Y} \left(\Lambda h(x, y) - G_{11} \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) dy \quad ; \quad a(x) = \int_{Y} G_{11} \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dy$$
 (VII.21)

$$où:(Y)=(0,1)$$

Comme dans le cas laminaire, l'équation (**VII**.17) dont l'inconnue est la pression homogénéisée p_0 n'admet pas de solution analytique, il est donc nécessaire d'utiliser les méthodes de résolution numérique tels que les différences finies, les éléments finis et les volumes finis.

VII.3 Equation géométrique du film

Les deux surfaces d'un contact entre lesquelles s'écoule un lubrifiant, peuvent avoir

les caractéristiques suivantes:

(a) les deux surfaces sont lisses et mobiles,

- (b) les deux surfaces sont lisses et stationnaires (fixes),
- (c) les deux surfaces sont rugueuses et mobiles figure VII.1,
- (d) les deux surfaces sont rugueuses et stationnaires (contacts hydrostatiques),
- (e) une surface rugueuse et stationnaire tandis que l'autre est lisse et mobile figure VII.2,
- (f) une surface est rugueuse et mobile tandis que l'autre est lisse et mobile.

Dans le cas (f) où la surface mobile est rugueuse figure VII.1, l'équation de Reynolds laminaire ou turbulente devient instationnaire. Il y a lieu de rajouter le terme transitoire $\mu \frac{\partial h}{\partial t}$ dans le second membre de l'équation.

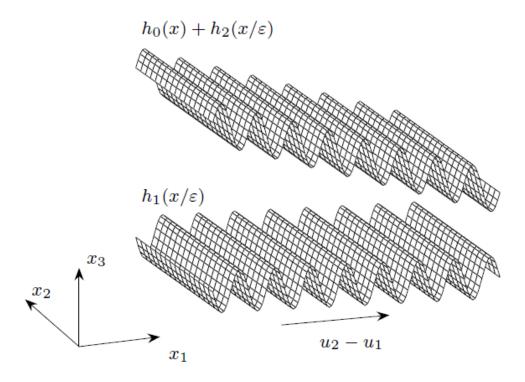


Fig. VII.1 Représentation schématique d'un contact dont les deux surfaces sont mobiles et présentant des distributions périodiques de rugosités.

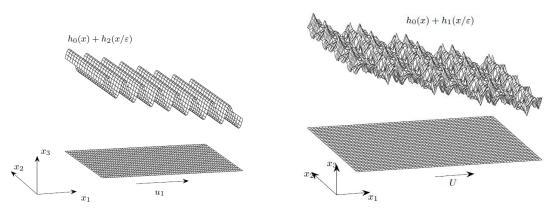


Fig. VII.2 Représentation schématique d'un contact dont la surface stationnaire est rugueuse et la surface mobile est lisse.

Dans le cas d'un contact figure VII.1, l'expression générale de l'épaisseur du film est de la forme :

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h_0(\mathbf{x}) + h_1(\mathbf{y}) + h_2(\mathbf{y}) \quad ; \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$$
 (VII.22)

Dans l'équation (VII.22), h_0 exprime la géométrie du film globale dans le cas où les deux surfaces sont parfaites (lisses), et h_1 et h_2 sont deux fonctions périodiques (sinusoïdales) dépendant des variables locales qui représentent les rugosités des deux surfaces. ε est un paramètre décrivant la longueur d'onde de la rugosité.

Dans le cas où la surface inférieure est lisse, l'expression (VII.22) se réduit à :

$$h(\mathbf{X}, \mathbf{y}) = h_0(\mathbf{X}) + h_1(\mathbf{y})$$
 (VII.23)

Pour une rugosité isotrope figure VII.3, l'équation de h₁ s'écrit en coordonnées locales :

$$h_1(y_1, y_2) = \alpha(\sin(2\pi y_1) + \sin(2\pi y_2))$$
 où α est l'amplitude de la rugosité

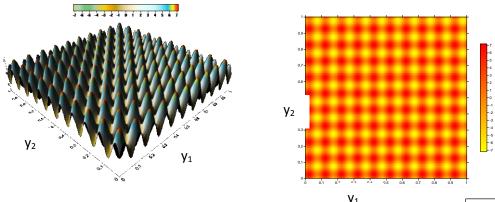


Fig. VII.3 Représentation d'une rugosité isotrope, $RMS = \sqrt{\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 h_1^2(y_1, y_2) dy_1 dy_2} = \alpha \sqrt{2}$

L'expression mathématique de h_1 en fonction des coordonnées globales (méthode directe) est :

$$\begin{split} h_1 &= \alpha \bigg(\sin \bigg(2\pi n_p \frac{x_1}{L} \bigg) + \sin \bigg(2\pi n_p \frac{x_2}{B} \bigg) \bigg) = \\ \alpha \bigg(\sin \bigg(2\pi \frac{x_1}{\varepsilon L} \bigg) + \sin \bigg(2\pi \frac{x_2}{\varepsilon B} \bigg) \bigg) \end{split}$$

VII.4 Caractéristiques hydrodynamiques homogénéisées

VII.4.1 Pression homogénéisée

La pression homogénéisée p_{θ} est calculée pour les deux régimes d'écoulement à partir de la résolution des équations de Reynolds laminaire et turbulente.

VII.4.2 Débit volumique homogénéisé

Les composantes du vecteur débit volumique peuvent être calculées par l'équation suivante :

$$Q_{\varepsilon_1} = \frac{1}{L_1} \iint_{\Omega} \left(\frac{V}{2} h - \frac{G_{11}}{\mu} \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2$$
 (VII.24a)

$$Q_{\varepsilon^2} = \frac{1}{L_2} \iint_{\Omega} \left(-\frac{G_{22}}{\mu} \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$
 (VII.24b)

où L_1 et L_2 sont respectivement la longueur et la largeur du domaine global (Ω).

Compte tenu de l'équation (III.30), les expressions des gradients de la pression sont :

$$\frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_{i}} = \frac{\partial p_{0}}{\partial x_{i}} + \varepsilon \left(\frac{\partial p_{1}}{\partial x_{i}} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial p_{1}}{\partial y_{i}} \right) + \varepsilon^{2} \times \dots = \frac{\partial p_{0}}{\partial x_{i}} + \frac{\partial p_{1}}{\partial y_{i}} + \varepsilon \frac{\partial p_{1}}{\partial x_{i}} + \varepsilon^{2} \times \dots$$
(VII.25)

i=1,2

Dans cette équation, l'indice zéro indique une quantité homogénéisée.

L'intégration des équations (VII.24) sur la cellule unitaire (Y) donne :

$$Q_{\varepsilon_1} = \frac{1}{L_1} \iiint_{\Omega} \left(\frac{V}{2} h - \frac{G_{11}}{\mu} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \dots \right) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2$$
 (VII.26a)

$$Q_{\varepsilon^2} = \frac{1}{L_2} \iint_{\Omega} \iint_{Y} \left(-\frac{G_{22}}{\mu} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \dots \right) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2$$
 (VII.26b)

Compte tenu de la relation (III.30), les équations (VII.26) s'écrivent lorsque $\varepsilon \to 0$ comme suit :

$$Q_{01} = \frac{1}{L_1} \iint_{\Omega} \iint_{Y} \left(\frac{V}{2} h - \frac{G_{11}}{\mu} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_j} v_j + v_3 \right) \right) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2 \quad ; j=1,2$$
(VII.27a)

$$Q_{02} = \frac{1}{L_2} \iiint_{\Omega} \left(-\frac{G_{22}}{\mu} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_j} v_j + v_3 \right) \right) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2$$
(VII.27b)

où encore:

$$Q_{01} = \frac{1}{L_1} \prod_{\mu} \iint_{\Omega} \left(\Lambda h - G_{11} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_j} v_j + v_3 \right) \right) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2 \quad ; j = 1,2$$
(VII.28a)

$$Q_{02} = \frac{1}{L_2} \prod_{\mu} \iiint_{\Omega} \left(-G_{22} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_j} v_j + v_3 \right) \right) \right) dy_1 dy_2 dx_1 dx_2$$
(VII.28b)

Sachant que $p_0 = p_0(x_1, x_2)$, il vient donc :

$$Q_{0i} = \frac{1}{L_i} \frac{1}{\mu} \iint_{\Omega} \left(\theta_i - a_{ij} \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \right) dx_1 dx_2 \qquad i, j = 1, 2$$
(VII.29)

Ou les coefficients a_{ij} et θ_i sont définis par les relations (VII.16).

VII.4.3 Force de frottement homogénéisée

En régime turbulent, la force de frottement (action tangentielle du fluide sur la paroi) est calculée à partir de l'intégration sur la surface du contact de la contrainte de cisaillement à la paroi :

$$\tau_{xy}(y=0,h) = \mp \frac{h}{2} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \frac{\mu V}{h} (1 + 0.0012 \Re_h^{0.94})$$
 (VII.30)

Soit:

$$\left|F_{\varepsilon}\right| = \iint_{\Omega} \tau_{xy} dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} \left(\frac{\mu V}{h} \left(1 + 0,0012 \Re_h^{0.94}\right) + \frac{h}{2} \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2 \tag{VII.31a}$$

En intégrant sur la cellule (Y), il vient :

$$\left|F_{\varepsilon}\right| = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\mu V}{h} \left(1 + 0.0012 \Re_{h}^{0.94}\right) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_{1}} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_{1}}\right) \left(p_{0} + \varepsilon p_{1}\right) \right) dy_{1} dy_{2} dx_{1} dx_{2}$$
(VII.32)

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a:

$$\left|F_{0}\right| = \iint_{\Omega} \iint_{Y} \left(\frac{\mu V}{h} \left(1 + 0,0012 \Re_{h}^{0,94}\right) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial p_{0}}{\partial x_{1}} \left(1 + \frac{\partial v_{1}}{\partial y_{1}}\right) + \frac{\partial p_{0}}{\partial x_{2}} \frac{\partial v_{2}}{\partial y_{1}} + \frac{\partial v_{3}}{\partial y_{1}}\right)\right) dy_{1} dy_{2} dx_{1} dx_{2}$$
(VII.33)

Soit par conséquent :

$$\left| F_0 \right| = \iint_{\Omega} \left(2\Lambda \alpha + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \gamma_j \frac{\partial p_0}{\partial x_j} \right) dx_1 dx_2 \quad ; j = 1, 2$$
 (VII.34)

où:

$$\alpha = \iint\limits_{\mathbb{Y}} \frac{1 + 0,0012 \Re_h^{0,94}}{h} dy_1 dy_2 \quad ; \; \beta = \iint\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_1 dy_2 \quad ; \; \gamma_1 = \iint\limits_{\mathbb{Y}} h \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right) dy_1 dy_2 \quad ; \; \gamma_2 = \iint\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_2}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_2}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1} dy_3 = \int\limits_{\mathbb{Y}} h \frac{\partial v_3}{\partial y_1}$$

VII.4.4 Portance hydrodynamique homogénéisée

La portance homogénéisée du contact ou la capacité de charge se calcule par l'intégration de la pression sur la surface du contact :

$$W_{\varepsilon} = \iint_{\Omega} p_{\varepsilon} dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (p_0 + \varepsilon p_1) dx_1 dx_2$$
 (VII.35)

Si on fait tendre $\varepsilon \to 0$, on trouve la charge homogénéisée :

$$W_0 = \iint_{\Omega} p_0 dx_1 dx_2 \tag{VII.36}$$

VII.5 Algorithme d'homogénéisation

L'algorithme ou le processus d'homogénéisation comprend les étapes suivantes :

Etape 1:

Résolution numérique du problème local gouverné par le système d'équations (VII.10) à (VII.12)

ou (VII.32) à (VII.34) dont les inconnues sont des fonctions périodiques $v_1(x, y)$, $v_2(x, y)$ et $v_3(x, y)$.

Etape2:

Calcul des coefficients des matrices A(x) et $\theta(x)$ définies par les expressions (VII.17) ou (VII.39) à l'aide d'une intégration numérique.

Etape 3:

Résolution numérique du problème global régi par l'équation homogénéisée (VII.18) ou (VII.40) dont l'inconnue est la pression homogénéisée p_0 .

Il est utile de noter que les étapes 1 et 2 de l'algorithme d'homogénéisation s'appliquant à chaque point $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ du domaine global $\Omega = (0.2\pi R) \times (-L/2, L/2)$.

VII.6 Conclusion

L'application du processus d'homogénéisation aux équations de Reynolds laminaire et turbulente par l'introduction d'un développement asymptotique multi-échelle de la pression a conduit à une cascade d'équations aux dérivées partielles décrivant deux problèmes : un problème local (échelle microscopique) gouverné par trois EDPs et un problème global régi par une EDP dont l'inconnue est la pression homogénéisée p_0 . La connaissance de celle-ci permettra de calculer les caractéristiques hydrodynamiques homogénéisées du contact établies dans ce chapitre.

La validation de la technique d'homogénéisation sera effectuée dans le chapitre suivant en comparant les solutions obtenues à partir de cette technique avec celles issues de l'application de la méthode directe classique dans le cas d'un palier cylindrique de longueur finie (écoulement 2-D) pour les deux régimes d'écoulement laminaire et turbulent.

CHAPITRE VIII

Comparaison entre les solutions directes et homogénéisées d'un palier hydrodynamique rugueux en régimes laminaire et turbulent

VIII.1 Description d'un palier hydrodynamique

Les paliers cylindriques ont pour objectif principal de supporter une charge radiale. Ces organes de support et de guidage en rotation sont de plus en plus utilisés dans les machines tournantes et alternatives. Ils sont constitués de trois parties : le coussinet (géométrie fixe), l'arbre en rotation et le film lubrifiant (troisième corps) qui les sépare (figure VIII.1).



a) Photographie d'un palier cylindrique

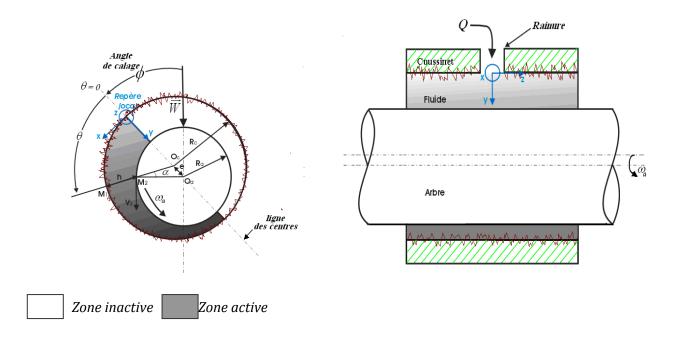
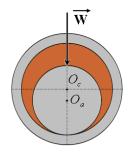


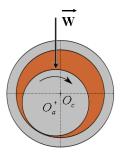
Fig. VIII.1. Représentation d'un palier cylindrique.

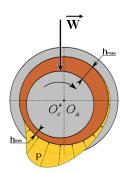
La configuration géométrique d'un palier est définie grâce à trois grandeurs qui sont : sa longueur L, son diamètre D, ou son rayon R et le jeu radial C. Ce dernier paramètre représente le jeu qui existe entre l'arbre et le coussinet lorsque ces deux éléments sont coaxiaux ; il est déterminé par : $C = R_c - R_a$, R_c étant le rayon du coussinet et R_a le rayon de l'arbre géométriquement , un palier cylindrique est caractérisé par trois grandeurs:

- lacktriangle le jeu radial C;
- le jeu relatif $\frac{C}{R}$;
- le rapport $\frac{L}{D}$.

Sous l'application d'une charge, les centres du coussinet et de l'arbre ne coïncident plus et il existe un coin convergent-divergent dans le film. La figure V.2 présente les trois phases que l'on observe lors de la mise en marche sous charge d'un palier lisse.







a) arrêt (contact hertzien) b) démarrage (régime de lubrification limite ou mixte) c) fonctionnement (régime de lubrification. HD).

Fig. VIII.2. Les positions de l'arbre observées lors de la mise en marche d'un palier lisse.

A l'arrêt (figure VIII.2.a), l'arbre et le coussinet sont en contact, la génératrice commune est opposée à la charge et la distance O_aO_c est égale au jeu radial C. Au démarrage (figure VIII.2.b), l'arbre roule en glissant à l'intérieur du coussinet, le régime de lubrification est dit mixte. Le lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent par la rotation de l'arbre, et dès que la vitesse de rotation devient suffisante, il y a création d'un champ de pression hydrodynamique qui s'oppose à la charge et qui l'équilibre (fig. VIII.2.c). Pour une vitesse de rotation stable et une charge $|\vec{W}|$ constante, le centre de l'arbre O_a occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet définie par les coordonnées polaires (ε_0, ϕ_0).

Si l'on rapporte l'ensemble des forces exercées sur l'arbre au centre O_a du palier, on obtient la capacité de charge \overrightarrow{F} du palier.

Lorsque le palier fonctionne sous des conditions normales, c'est-à-dire lorsqu'il est aligné (i.e. les axes de l'arbre et du coussinet sont parallèles), la géométrie du contact est alors définie par l'excentricité e (distance entre les centres de l'arbre O_a et du coussinet O_c) et l'angle de calage ϕ (angle entre la ligne des centres et la direction de la charge) figure VIII.1.

Dans ce chapitre, on se limite au régime hydrodynamique pur et on suppose que l'écoulement du fluide à travers le palier est permanant et isotherme.

VIII.2. Equations géométriques du film

VIII.2.1. Cas du palier cylindrique

Dans le cas d'un palier cylindrique lisse, l'équation géométrique du film s'écrit :

$$h_0 = C(1 + \varepsilon_0 \cos \theta) \tag{VIII.1}$$

où l'excentricité relative $\varepsilon_0 = \frac{e}{C}$ varie de 0 à 1 et $\theta = \frac{x_1}{R}$

La prise en considération de la rugosité de la surface du coussinet conduit à la modification de la géométrie locale du film. Dans le cas d'une rugosité isotrope, l'équation géométrique du film devient :

$$h = h_0 + h_1(\theta, x_2) \tag{VIII.2}$$

avec

 $h_{\rm l}=\alpha\bigg(\sin\!\left(n_{p}\theta\right)+\sin\!\left(\frac{2\pi n_{p}x_{2}}{L}\right)\bigg), \ \alpha \ {\rm \acute{e}tant \ l'amplitude \ de \ la \ rugosit\acute{e}t \ } n_{p} \ \ {\rm le \ nombre \ de \ rugosit\acute{e}s} \ {\rm ou \ de \ }$ périodes.

VIII.2.2. Equation de Reynolds turbulente pour un palier cylindrique

Les rayons R_a et R_c étant très voisins, on peut négliger la courbure du film et développer l'arbre et l'assimiler à un plan confondu avec le référentiel ($0, x_1, x_2$) (figure VIII.3).

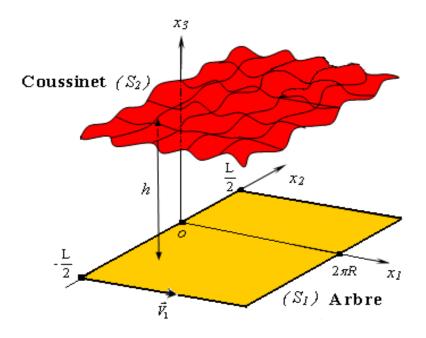


Fig. VIII.3. Palier développé.

Les conditions cinématiques relatives aux 2 surfaces du contact sont représentées sur la figure VIII.4.

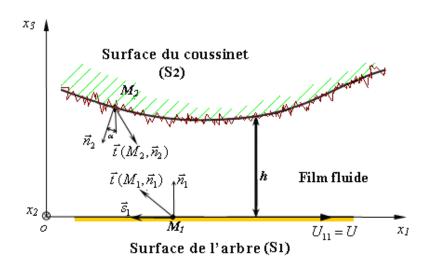


Fig. VIII.4. Section droite du palier développé.

En coordonnées cartésiennes, l'équation de Reynolds turbulente peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(h^3 G_{x_1} \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(h^3 G_{x_2} \frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_2} \right) = \Lambda \frac{\partial h}{\partial x_1}$$
 (V.3)

avec $\Lambda = \frac{1}{2} \mu U$; $U = \omega R$ (vitesse linéaire de l'arbre) (fig. VIII.4).

VIII.3. Solutions directe et homogénéisée

Les solutions directes et homogénéisées sont recherchées numériquement en résolvant l'équation de Reynolds turbulente (VIII.3) et l'équation de Reynolds homogénéisée par la méthode des différence finies centrées figure VIII.5. La discrétisation de ces équations conduit à la résolution de systèmes algébriques par la méthode itérative de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation. L'application de cet algorithme pose le problème de détermination de la valeur optimale du coefficient de sur-relaxation dont la valeur entre 1 et 2 ;celui-ci permet ou processus de converger rapidement vers la solution en un nombre minimal d'itérations ou un temps CPU minimal. Nous avons déterminé cette valeur par expérimentation numérique. Les différentes simulations numériques effectuées nous ont permises de constater que la valeur optimale du facteur de relaxation dépend sensiblement des caractéristiques du maillage (nombre de points de discrétisation) et des conditions de fonctionnement du palier.

Le choix de l'algorithme de Gauss-Seidel est justifié par le fait qu'il permette de prendre en considération le phénomène de cavitation (rupture du film) se produisant dans la région divergente du palier, le système d'l'équations peut aussi être résolu à l'aide de la méthode itérative du gradient conjugué.

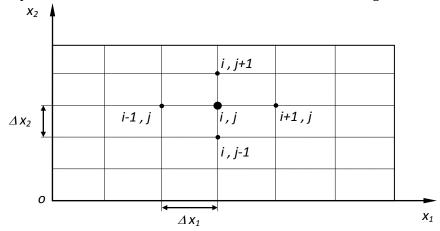


Fig. VIII.5 Discrétisation du film.

VIII.4 Comparaison des solutions directes et homogénéisées

Deux programmes de calcul ont été élaborés pour simuler le comportement du palier en régime laminaire ou turbulent en se basant sur le concept des deux méthodes d'analyse développées (directe et homogénéisation). Les données de cette étude sont reportées dans le tableau VIII.1.

Tableau VIII. 1 Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement du palier

Paramètres	Symboles	Valeurs	Unités
Longueur du palier	L	0.050	m
Rayon du palier	R	0.025	m
Jeu radial du palier	С	50.	μт
Excentricité relative	\mathcal{E}_0	0.5	-
Amplitude de rugosité	α	(0.0-0.5)	μт
Rugosité RMS	RMS	$\alpha\sqrt{2}$	μт
vitesse de rotation de l'arbre en laminaire	ω	3000	rpm
Vitesse de rotation de l'arbre en turbulent	ω	30000	rpm
Viscosité dynamique du lubrifiant	μ	0.005	Pa.s
masse volumique du fluide	ρο	900	[kg/m3]

Les solutions directes et homogénéisées sont obtenues pour diverses valeurs de l'amplitude relative de rugosité ($\widetilde{\alpha}=0.0, 0.1, 0.15$ et 0.2) et du paramètre ε qui correspond à l'inverse du nombre de périodes ou de rugosités dont les valeurs sont $n_p=10, 40, 60$. Notons que pour le cas d'un palier lisse, $\widetilde{\alpha}=0.0$

Tous les calculs sont effectués pour une valeur de l'excentricité relative $\varepsilon_0=0.50$.

Les caractéristiques des maillages utilisées pour la discrétisation spatiale des différentes équations différentielles sont indiquées dans le tableau VIII.2.

Tableau VIII.2 Caractéristiques des maillages par différences finies.

Méthodes d'analyse	EDPs gouvernant le problème	Nombre de mailles
Déterministe (directe)	Equation de Reynolds turbulente	1000×1000
Homogénéisation	Equations locales	40×40
	Equation globale	80×80

Les tableaux VIII.3 à VIII.6 représentent les répartitions de pression hydrodynamique (2-D) et (3-D) obtenues dans le cas du palier lisse et du palier rugueux pour les deux régimes d'écoulement laminaire et turbulent. D'après ces illustrations, nous observons clairement que les solutions directe et homogénéisée obtenues dans le cas lisse sont confondues ce qui nous permet de valider le programme de calcul basé sur l'homogénéisation de l'équation de Reynolds en régimes laminaire et turbulent. Dans le cas rugueux, nous remarquons que la solution directe obtenue pour une amplitude de rugosité relativement faible $\widetilde{\alpha}=0.1$ converge vers la solution homogénéisée pour un nombre de rugosités ou de périodes $n_p \geq 40$. Cependant, pour une amplitude relative plus grande, i.e. $\widetilde{\alpha}=0.2$, la convergence de la solution directe ne peut être obtenue que pour un nombre important de rugosités; c'est à dire $n_p > 60$.

Tableau VIII.3 Représentation (2-D) des solutions directe et homogénéisées dans la section médiane du palier en régimes laminaire et turbulent, ε_0 =0.5

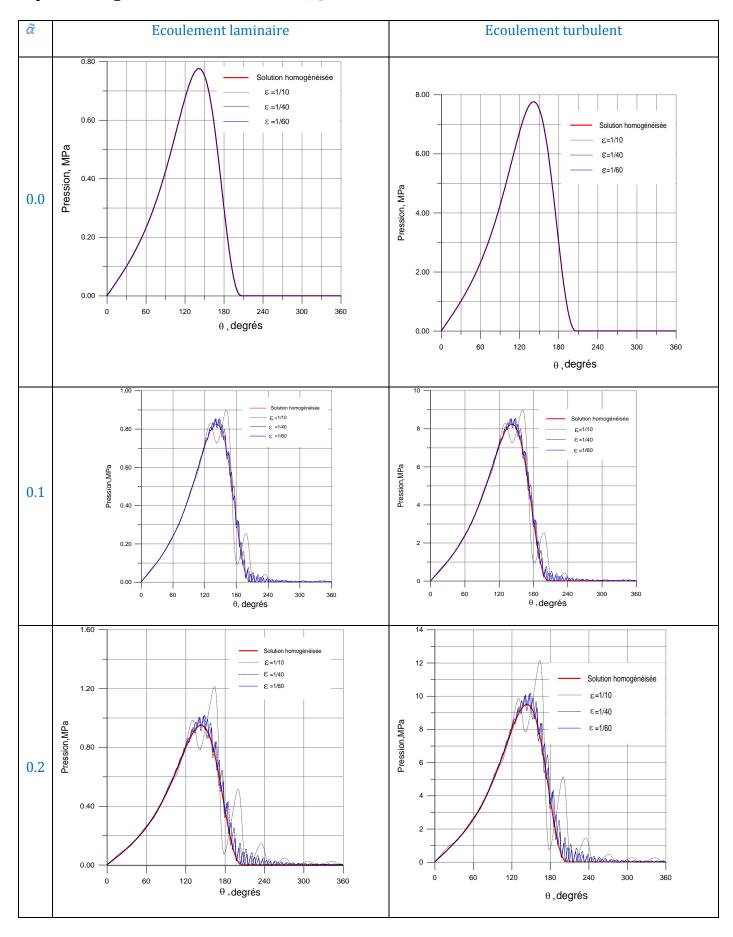


Tableau VIII.4 Représentation (3-D)des solutions directes et homogénéisées dans le cas lisse en régime laminaire et turbulent

pour $\tilde{\alpha}$ =0.00; ε_0 =0.5

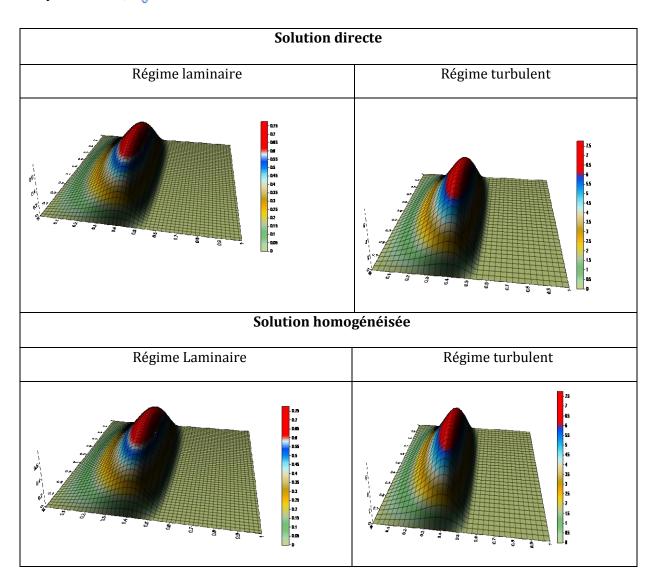


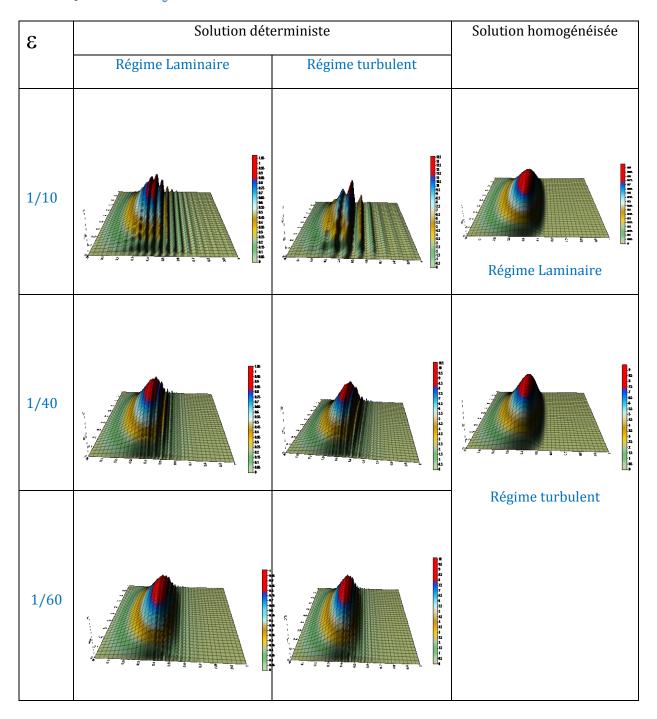
Tableau VIII.5 Représentation en (3-D)des solutions directe et homogénéisées dans le cas d'une rugosité isotrope en régime laminaire et turbulent

pour
$$\tilde{\alpha}$$
=0.1; ε_0 =0.5

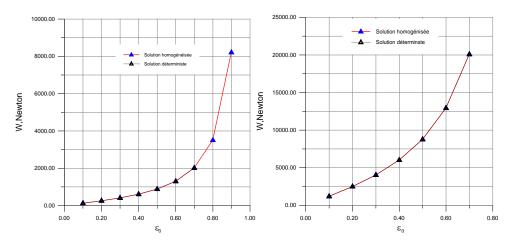
3	Solution déterministe		Solution homogénéisée
	Régime Laminaire	Régime turbulent	
1/10	30		Régime Laminaire
1/40		44 22 22 23 24 24 24 24 24 24 24 24 24 24 24 24 24	
			Régime turbulent
1/60	184 185 185 185 185 185 185 185 185 185 185		

Tableau VIII.6 Représentation (3-D) des solutions directes et homogénéisées dans le cas d'une rugosité isotrope en régime laminaire et turbulent

pour
$$\tilde{\alpha}$$
=0.2; ε_0 =0.5



Les figures VIII.6 à VIII.8 montrent clairement que lorsque le nombre de périodes est suffisamment grand $n_p = 100$, les portances hydrodynamiques directes et homogénéisées, calculées à partir de l'intégration des pressions directes et homogénéisées sur la surface du palier, convergent bien même pour des grandes amplitudes relatives de rugosité.

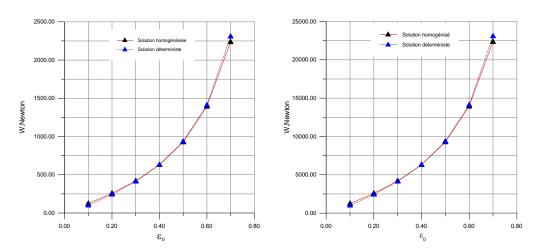


a) Régime laminaire

b) Régime turbulent

Fig. VIII.6 Comparaison des capacités de charge homogénéisées et directes dans le cas du palier lisse,

$$(\tilde{\alpha} = 0.0, \varepsilon_0 = 0.50)$$

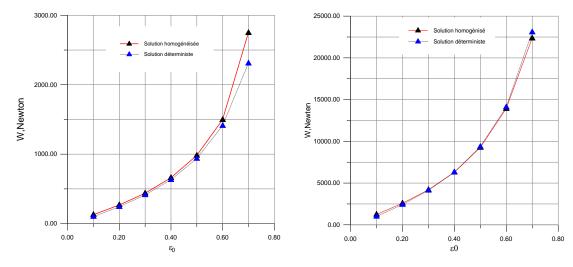


a) Régime laminaire

b) Régime turbulent

Fig. VIII.7 Comparaison des capacités de charge homogénéisée et directe dans le cas du palier rugueux,

$$(\tilde{\alpha}=0.1,\,\varepsilon_0=0.50)$$



a) Régime laminaire

b) Régime turbulent

Fig. V.8 Comparaison des capacités de charge homogénéisée et directe dans le cas du palier rugueux,

$$(\tilde{\alpha} = 0.15, \varepsilon_0 = 0.50)$$

VIII.5 Application de la méthode d'homogénéisation à l'étude des effets de la rugosité et de la turbulence sur la pression et la capacité de charge d'un palier

Un programme de calcul a été élaboré en se basant sur l'algorithme d'homogénéisation exposé dans le chapitre précédent en vue de simuler le comportement d'un palier hydrodynamique rugueux en régime laminaire ou turbulent. Les données de cette étude sont reportées dans le tableau **VIII**.1.

La figure VIII.9 représente les profils de pressions homogénéisées calculées en régime turbulent pour trois valeurs de l'amplitude relative des rugosités. Nous observons que :

- les courbes de pression gardent la même allure pour les trois valeurs de l'amplitude
- la pression maximale augmente avec l'amplitude de rugosité.

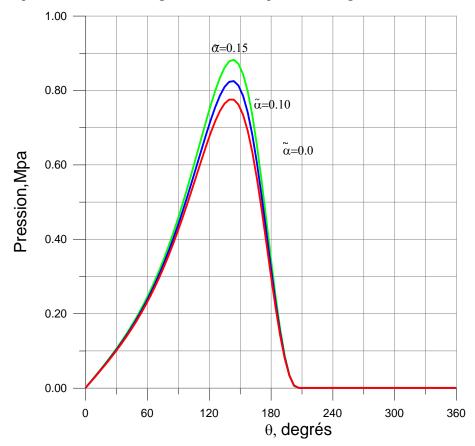


Fig. VIII.9 Effets de l'amplitude de la rugosité sur le profil de pression homogénéisé en régime turbulent

Les figures VIII.10 et VIII.11 mettent clairement en évidence les effets non négligeables de la turbulence sur le profil de pression ainsi que la capacité de charge du palier. En effet, pour une excentricité relative fixée, la portance calculée en régime turbulent est largement supérieure à celle calculée en laminaire aussi bien dans le cas lisse que rugueux. Nous pouvons conclure que la turbulence a un effet positif vis-à-vis de la capacité de charge du palier et que l'effet de l'amplitude de la rugosité sur le profil de pression et la charge n'est pas appréciable.

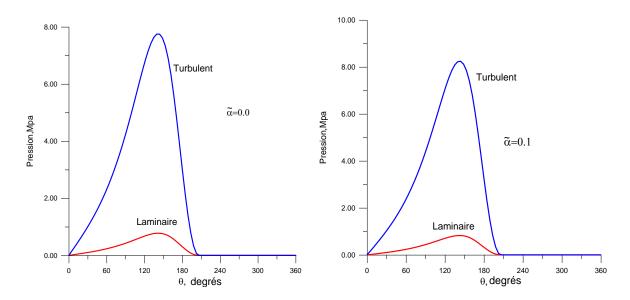


Fig. VIII.10 Comparaison des profils de pression homogénéisée calculés en régimes laminaire et turbulent pour $\varepsilon_0=0.5$ et différentes valeurs de $\widetilde{\alpha}$.

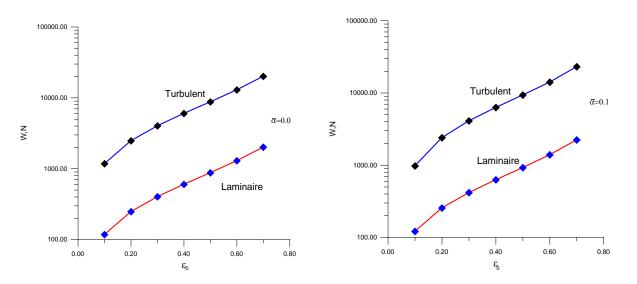


Fig. VIII. 11 Comparaison des portances homogénéisées calculées en régimes laminaire et turbulent pour $\varepsilon_0=0.5$ et différentes valeurs de $\widetilde{\alpha}$.

VIII.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la convergence des solutions directes obtenues par la résolution numérique directe des équations de Reynolds laminaire et turbulente vers les solutions homogénéisées p_0 pour une forme de rugosité isotrope. La comparaison des solutions obtenues représentées en (2-D) et en (3-D) par les méthodes d'analyse directe et d'homogénéisation a permis d'affirmer que la méthode d'homogénéisée est efficace aussi bien pour le cas laminaire que turbulent. Il a été trouvé que pour des amplitudes relatives de rugosité faibles et un nombre important de rugosités, la solution directe tend vers la solution homogénéisée p_0 .

Afin d'améliorer davantage l'efficacité de la méthode d'homogénéisation, il est nécessaire d'effectuer une étude de sensibilité des maillages (cellule unitaire (Y) domaine global (Ω)) pour optimiser le nombre de points de discrétisation spatiale.

L'application de cette méthode à l'étude du comportement d'un palier a permis de mettre en évidence les effets non négligeables de l'amplitude de rugosité sur le pic de pression. D'autre part, la prise en considération de la turbulence entraîne une augmentation significative du pic de pression et de la portance aussi bien dans le cas lisse que rugueux.

Références bibliographiques utilisées dans les chapitres VI à VIII

- [45] Ingel Ryhmng.dynamique des fluid,Presses Polytechnique et Universitaire, ROMANDES deuxième édition, 1991
- [46] Constantinescu V.N."on turbulent lubrication", Proc. Inst. Mech. Eng. Vol 173, n°38 (1959).
- [47] Constantinescu V.N"Theory of, Turbulent Lubrication", Proceeding on lubrication and wear, Houston symposium 1963 (1965).
- **[48]** Constantinescu V.N. « calcul des paliers lisses fonctionnant en régime turbulent ». Revue de mécanique Appliquée, Tome 1, n°6, Acad. R.P.R. (1961).
- **[49]** Constantinescu V.N, "Sur la lubrification non permanente en régime turbulent". Revue de Mécanique Appliquée, Tome IV, n°1, Acad. R.P.R. (1959).
- **[50]** Constantinescu V .N. et galetuse s." study on the turbulent lubrication by using the mixing length hypothesis with a parabolic variation upon the normal to the film". Rev. roum. Sci. techn.-Mech. Appl., tome 11, $n^2(1966)$.
- **[51]** Constantinescu V.N.". On the improvement of the turbulent lubrication theory by using the mixing-length hypothesis". Rev. roum. sci. techn.-mech. appl., tome 10, n°2 (1965).
- **[52]** Constantinescu V .N."consideratii asupra lubrificatiei tridimensionale in regim turbulent"studii si cereetari de mecanica applicata, Tome 4 , n°10, Acad R.P.R.(1959).
- [53] Constantinescu V.N.". Analysis of bearings in turbulent regime". Trans. A.S.M.E., Paper n°61, lub 5 (1961).
- **[54]** Constantinescu V .N et Galetuse S, On the determination of friction forces in turbulent lubrication, ASME transaction, 8, 367-380, 1965.
- **[55]** Constantinescu V.N, Basic relationship in turbulent lubrication and their extension to include thermal effects. Journal of Lubrication Technology. Transctions of The ASME, April 1973,147-154.
- [56] J. Frêne, Contribution à l'étude des régimes de transition dans les paliers lisses, thèse de docteuringénieur, INSA-Lyon, 1970.
- [57] J. Frêne, Régime d'écoulement non laminaire en films minces-application aux paliers lisses thèse de Docteur ès Sciences physiques, Université claude-Bernard Lyon, octobre 1975.
- [58] NG C.W. "Fluid dynamic foundation of turbulent lubrication theory". ASLE. Trans. n°7 (1964).
- [59] NG C.W. et Pan C.H.T. "A linearized lubrication theory", Trans. A.S.M.E, serie d, n°3 (1965).
- **[60]** Elrod H.G. et NG C.W. "A Theory for turbulent fluid films and its application to Bearing", Trans. A.S.M.E. Serie F, n°3(1967).
- **[61]** Taylor G.I. "Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders". Phil. Trans. A 223 (1923).

Principales notations utilisées dans les chapitres VI à VIII

 G_{x} , G_{Z} : fonction de turbulence introduites par Ng et Pan

 R, R_1, R_2 :rayon du palier, de l'arbre, du coussinet

 $R_{h_{\bullet}} = \frac{\rho V h}{\mu}$:nombre de Reynolds

u, v, w :composantes des vitesse.

 $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$: composantes moyennes des vitesses.

u', v', w' :composantes des fluctuations de vitesse

 v^+ :variable sans dimention.

ω :vitesse anguulaire.

 $\varepsilon = \frac{e}{c}$:excentricité relative.

μ :viscosité dynamique.

v :viscosité cinématique

ρ :masse volumique.

τ :contrainte de cisaillement à la paroi

 au_{XY}, au_{ZY} :contraintes de cisaillement dans le film.

 \bar{y}_i :composantes moyennes de l'accélération.

 $T_c = \frac{\rho V_{CC}}{\mu} \sqrt{\frac{c}{R}}$:nombre de Taylor critique.

 $\overline{U}_i = rac{u_i}{v}$: composantes ,sans dimension,de la vitesse

 $V = \omega R$:vitesse linéaire de l'arbre en rottion.

w :charge appliquée au palier.

 $Y = \frac{x_2}{h}$:variable sans dimension.

C_i :constantes d'intégration.

e : exentricité

h :épaisseur du film

l :longueur de mélange

T	:variable de temps
u_i	:composantes des vitesses
$ar{u}_i$:composantes moyennes des vitesses
u_i'	:composantes des fluctuations de vitesses
C_f	:nombre de frottement
F	:force de frottement, (N)
h_0	:épaisseur du film du contact parfait, (m)
h_1	:amplitude des rugosités, (m)
h	:épaisseur du film lubrifiant, $h = h_0 + h_1$, (m)
$h_arepsilon$:épaisseur déterministe du film lubrifiant, (m)
n_p	nombre de périodes ou de rugosités, $n_p = \frac{1}{\varepsilon}$
p	pression dans le film lubrifiant, (Pa)
p_0	pression, solution homogénéisée, (Pa)
$p_{arepsilon}$	pression, solution déterministe, (Pa)
$\overline{\mathcal{Q}}$	débit de fuite moyen, $m^3.s^{-1}$
U	vitesse de déplacement de la glissière, $m.s^{-1}$
u_1, u_2	composantes du champ de vitesse de l'écoulement suivant x_1 et x_2 , $\textit{m.s}^{-1}$
$\overline{u}_1,\overline{u}_2$	vitesses moyennes de l'écoulement suivant x_1 et x_2 , $m.s^{-1}$
W	portance hydrodynamique, (N)
x	coordonnées d'espace globales, $oldsymbol{x} = \left\langle x_1 x_2 \right\rangle$
y	coordonnées d'espace locales, $\mathbf{y} = \left\langle y_1 y_2 \right\rangle$
Y	cellule unitaire, $Y = (0, 1) \times (0, 1)$
α	amplitude des rugosités, (m)
\widetilde{lpha}	amplitude adimensionnée, $\widetilde{lpha}={}^{\alpha}\!\!/_{\!h_{\!\scriptscriptstyle{\min}}}$
Φ	fonction de dissipation visqueuse, $W.m^{-3}$
η	constante physique due à la présence des couples de contraintes, (N.s)

 λ longueur d'onde des rugosités, (m)

 $\lambda_{x_1}, \lambda_{x_2}$ longueurs d'onde des rugosités suivant les directions x_1 et x_2 , (m)

 Λ constante, $\Lambda = 6\mu U$, Pa.m

o masse volumique du lubrifiant, $kg.m^{-3}$

 μ viscosité dynamique du lubrifiant, (Pa.s)

Conclusions générales

L'étude entreprise dans le cadre de ce PNR visait à développer des modèles de simulation numérique basés sur le processus d'homogénéisation des équations de Reynolds newtonienne et non newtonienne considérées comme les équations de base de la lubrification hydrodynamique en régimes d'écoulements laminaire et turbulent. Ces modèles permettent de prendre en considération la géométrie locale du contact (rugosité) ainsi que le comportement non newtonien du fluide lubrifiant.

La recherche bibliographique effectuée dans le premier chapitre a permis d'une part, de situer notre contribution par rapport aux travaux déjà réalisés dans le domaine d'analyse de systèmes lubrifiés prenant en compte la géométrie locale ; c'est-à-dire les défauts de forme et de rugosité existant au niveau des surfaces. La littérature technique offre trois types d'analyse des contacts lubrifiés rugueux que nous avons répertoriés comme suit :

- l'analyse stochastique,
- l'analyse déterministe ou directe,
- l'analyse d'homogénéisation.

Notre choix s'est porté sur la technique d'homogénéisation car cette technique est rigoureuse et la mieux adaptée en particulier dans le cas des rugosités anisotropes dont la distribution est périodique. D'autre part, par comparaison à la méthode directe, la technique d'homogénéisation ne nécessite pas de maillages très fins ; c'est-à-dire des moyens de calcul importants pour prendre en compte l'effet de la rugosité.

La recherche bibliographique effectuée sur la caractérisation physique et rhéologique des fluides lubrifiants à la fin du premier chapitre a permis de mettre en évidence la diversité et la complexité des lois de comportement des huiles de graissage surtout lorsque celles-ci sont dopées. Parmi les modèles de fluides proposés dans la littérature, nous avons sélectionné le modèle de fluide de V. K. Stokes communément connu sous le nom de fluide polaire ou à couple de contrainte. Ce modèle permet de prendre en considération les effets des couples de contraintes dus à la présence des polymères additifs dans le fluide lubrifiant. L'application de ce modèle, dont l'avantage est de conserver le caractère linéaire de l'équation de Reynolds, a fait apparaître dans les équations de la lubrification hydrodynamique un nouveau paramètre caractérisant la longueur de la chaîne moléculaire des polymères incorporés à la base du lubrifiant.

L'homogénéisation des équations de Reynolds laminaire et turbulente dans le cas newtonien ou non newtonien, basée sur un développement asymptotique multi-échelle de la pression, a conduit à l'écriture d'un système de quatre équations aux dérivées partielles gouvernant deux types de problème ; un problème local (échelle microscopique) et un autre global (échelle macroscopique).

Les étapes du processus d'homogénéisation ainsi que le traitement numérique des équations différentielles par la méthode des différences finies ont été exposées explicitement dans ce projet.

Dans un premier temps, nous avons étudié dans le cas d'un patin incliné la convergence de la solution déterministe obtenue par la résolution numérique directe de l'équation de Reynolds newtonienne et non newtonienne vers la solution homogénéisée pour les trois formes de rugosités : transversales, longitudinales et anisotropes. La comparaison des solutions obtenues par les méthodes déterministe et d'homogénéisation a permis de conclure que la méthode d'homogénéisation est efficace du point de vue espace mémoire quelque soit la forme de rugosité. En effet, pour des amplitudes relativement faibles et un nombre important de rugosités, la solution déterministe obtenue par la résolution directe de l'équation de Reynolds newtonienne ou non newtonienne tend vers la solution homogénéisée p_0 pour les trois formes de rugosités considérées.

En suite, une étude inédite des effets combinés des couples de contrainte et des rugosités de surface a été menée en utilisant la méthode d'homogénéisation dans le cas du patin incliné de Mitchell. Les résultats obtenus nous ont conduits aux constatations et conclusions suivantes:

- La présence des rugosités entraîne une augmentation du pic de pression surtout dans le cas des rugosités transversales. Ceci est confirmé par les résultats publiés dans la littérature en utilisant les modèles déterministes et stochastiques.
- Pour les rugosités transversales et anisotropes, la pression maximale et la portance sont sensiblement influencés par l'amplitude des rugosités aussi bien pour le cas newtonien que non newtonien.
 Cependant, ces paramètres ne sont pas affectés de façon significative par l'amplitude dans le cas des rugosités longitudinales.
- Pour une même valeur de l'amplitude, la pression maximale et la portance hydrodynamique calculées dans le cas des rugosités transversales sont supérieures à celles obtenues avec les rugosités anisotropes et longitudinales.
- La portance hydrodynamique augmente de façon importante avec le paramètre du couple de contrainte; cette augmentation est plus significative dans le cas des rugosités transversales et anisotropes.
- A travers les simulations effectuées, il s'est avéré que la méthode itérative du gradient conjugué converge plus rapidement que la méthode itérative de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation.
- L'emploi de la méthode itérative de Gauss-Seidel nécessite la détermination à travers des expérimentations numériques de la valeur optimale du facteur de sur-relaxation afin d'assurer une convergence plus rapide du processus.

Nous nous sommes aussi intéressés dans ce projet à l'étude du comportement des systèmes lubrifiés tels que les paliers radiaux cylindriques fonctionnant en régime turbulent avec des nombres de Reynolds et de Taylor très élevés. Il a été montré que la prise en considération de la turbulence en plus de la rugosité affecte sensiblement le profil de pression et la portance. Il a été trouvé que pour une excentricité de fonctionnement

fixé, la portance homogénéisée calculée en régime turbulent est nettement plus grande que celle obtenue en laminaire.

L'étude théorique menée dans le cadre de ce PNR est d'un intérêt technologique certain car elle constitue une meilleure compréhension du comportement des systèmes mécaniques lubrifiés par des huiles minérales dopées. Dans ce qui suit, nous présentons les activités menées dans le cadre de ce projet :

- Elaboration de logiciels d'aide à la conception des systèmes lubrifiés (patins & butées hydrodynamiques) en prenant en considération les effets de rugosité et les effets non newtoniens.
- Rédaction et soumission de cinq (5) publications internationales :
- 1 « Etude par la méthode d'homogénisation des effets combinés de la rugosité de surface et de la rhéologie du lubrifiant sur le comportement d'un contact hydrodynamique », Mechanics & Industry 11, 345–363 (2010), http://www.mechanics-industry.org
- 2- "The Homogenization Method of Roughness Analysis in Turbulent Lubrication", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers (IMechE), Part J: Journal of Engineering Tribology, Vol. 227, Issue 10, Oct. 2013, http://pij.sagepub.com
- 3-" Etude théorique et numérique des effets combinés non-Newtonien et de la piézoviscosité du lubrifiant sur les performances statiques d'un palier compliant", Matériaux & Techniques 100, 87-100 (2012), EDP Sciences, http://www.mattech-journal.org
- 4- "The influence of lubricant particle concentration and rheological properties on bearing behavior", Mechanics & Industry, EDP Sciences, **2012**, Publié en Ligne le 29/01/**2012**, http://www.mechanics-industry.org
- 5- "Elasto-aerodynamic lubrication analysis of a self acting air foil journal bearing, Journal of Lubrication Science, John Wiley Editor, Vol. 24, Issue 3, pp. 95-128, **2012**. http://www.interscience.wilev.com
 - Soumission & Présentation de trois communications internationales:
- 1- "Homogenization of laminar and turbulents Reynolds' equations: an application to the analysis of rough hydrodynamic journal bearings", Congrès STLE (American Society of Tribologists and Lubrication Engineers), 68th Annual Meeting Detroit, Michigan (USA), 5-9 Mai 2013, www.stle.org/events/annual/details.aspx
- 2- «Linear dynamic analysis of aeroelastic journal bearings considering both the steady-state and dynamic deformations of foils», CongrèsFrançais de Mécanique (CFM'2013), Bordeaux 26-30 Août 2013, www.cfm2013.org/
- 3- H. Bensouilah, M. Lahmar, B. Bou-Said, "Elasto-aerodynamic lubrication analysis of a self-acting air foil journal bearing", STLE/ASME International Joint Tribology Conference October 24-26, 2011, Los Angeles, California (USA), www.asmeconferences.org/IJTC2011/
 - Encadrement & soutenance de deux (2) Magisters et de cinq (5) Masters.

En fin, ce projet a permis de former une nouvelle équipe de recherche au sein du LMS dénommée : « Systèmes Mécaniques Lubrifiés » dont le porteur de ce projet est responsable. D'autre part, une convention de coopération scientifique et pédagogique entre le LaMCoS de Lyon (Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures) et le LMS de Guelma est en cours de préparation avec l'aide du chercheur Dr Benyebka BOU-SAID.

REFERENCES COMPLEMENTAIRES

- Gourdin A., M. Boumahrat, 1989, Méthodes numériques appliqués : avec nombreux problèmes résolus en Fortran 77, Paris : Technique et Documentation (Lavoisier), 440 p.
- J. M. Georges, Frottement, usure et lubrification, 2000, CNRS Editions, Eyrolles, ISBN 2-212-05823-3.
- F. P. Bowden, D. Tabor, Friction et lubrification, 1959, Monographies Dunod, Paris.
- H. Yelle, Notes de cours de transmission de puissance, 2003, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada.
- L. Goirand, Notes de cours de tribologie, 1984, Institut National de Génie Mécanique (INGM) de Boumerdès.
- Notes techniques du Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM) n° 18.
- A.Z. Szeri,tribology friction-lubrication,and wear, Hewisphere publication cororation, MC Graw-Hill Booh Company. 1980.
- Christophe Minet, Lubrification mixte dans les étanchéités dynamiques application aux garnitures mécaniques d'étanchéité nouvelle thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 10 Juillet 2009
- Mouassa Ahcene, Contribution à l'étude de l'influence des défauts de forme et de rugosité.des surfaces sur les performances des contacts lubrifies sévères .thèse de Doctorat, Université 08 mai 1945 Guelma, 2010.
- M. Kane, B. Bou-Said. A study of roughness and non-newtonian effects in lubricated contacts. ASME Journal of Tribology, 127, 575–581, 2005.

Annexe A

Analyse dimensionnelle des équations de mouvement

d'un fluide polaire

La théorie des écoulements de films minces visqueux suppose que l'épaisseur du film mesurée suivant la direction (O, x_3) est très faible devant les deux autres dimensions de l'espace, ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes des équations (IV.43) de poser :

$$\widetilde{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \widetilde{x}_2 = \frac{x_2}{L}, \quad \widetilde{x}_3 = \frac{x_3}{h}, \quad \widetilde{t} = \frac{tV}{L},$$

$$\widetilde{u}_1 = \frac{u_1}{L}, \widetilde{u}_2 = \frac{u_2}{L}, \quad \widetilde{u}_3 = \frac{u_3L}{Vh}, \quad \widetilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \, \widetilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \text{ et } \widetilde{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}$$
(A1)

Dans ces expressions, L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes (o, x_1) et (o, x_2) , h et Vh/L celles suivant (o, x_2) tandis que L/V, μ_0 et η_0 définissent l'ordre de grandeur du temps et des constantes physiques du fluide. Ce changement de variables conduit à poser $\tilde{p} = p \frac{h^2}{VL\mu_0}$ et $\ell_0 = \sqrt{\eta_0/\mu_0}$.

Compte tenu de ces changements de variables, les équations de mouvement s'écrivent :

$$\begin{split} \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{x}_{1}} &= -\xi \mathfrak{R}_{h} \widetilde{\rho} \frac{D \widetilde{u}_{1}}{D \widetilde{t}} + \widetilde{\mu} \left[\xi^{2} \left(\frac{\partial^{2} \widetilde{u}_{1}}{\partial \widetilde{x}_{1}^{2}} + \frac{\partial^{2} \widetilde{u}_{1}}{\partial \widetilde{x}_{3}^{2}} \right) + \frac{\partial^{2} \widetilde{u}_{1}}{\partial \widetilde{x}_{2}^{2}} \right] - \left(\frac{\ell_{0}}{h} \right)^{2} \widetilde{\eta} \left[\xi^{4} \left(\frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{1}}{\partial \widetilde{x}_{1}^{4}} + \frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{1}}{\partial \widetilde{x}_{3}^{4}} \right) + \frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{1}}{\partial \widetilde{x}_{2}^{2}} \right] - 2 \left(\frac{\ell_{0}}{h} \right)^{2} \widetilde{\eta} \left[\xi^{4} \left(\frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{1}}{\partial \widetilde{x}_{1}^{2}} + \frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{1}}{\partial \widetilde{x}_{2}^{2}} \right) \right] \\ \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{x}_{2}} &= -\xi \mathfrak{R}_{h} \widetilde{\rho} \frac{D \widetilde{u}_{2}}{D \widetilde{t}} + \widetilde{\mu} \left[\xi^{2} \left(\frac{\partial^{2} \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{1}^{2}} + \frac{\partial^{2} \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{3}^{2}} \right) + \frac{\partial^{2} \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{2}^{2}} \right] - \left(\frac{\ell_{0}}{h} \right)^{2} \widetilde{\eta} \left[\xi^{4} \left(\frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{1}^{4}} + \frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{3}^{4}} \right) + \frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{2}^{2}} \right] - 2 \left(\frac{\ell_{0}}{h} \right)^{2} \widetilde{\eta} \left[\xi^{4} \left(\frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{1}^{2}} + \frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{3}^{2}} \right) \right] \\ - 2 \left(\frac{\ell_{0}}{h} \right)^{2} \widetilde{\eta} \left[\xi^{4} \left(\frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{1}^{2}} + \frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{2}^{2}} \right) + \xi^{2} \left(\frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{2}}{\partial \widetilde{x}_{1}^{2} \partial \widetilde{x}_{2}^{2}} \right) \right] \\ - \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{x}_{3}} = \xi^{2} \left\{ - \xi \mathfrak{R}_{h} \widetilde{\rho} \frac{D \widetilde{u}_{3}}{D \widetilde{t}} + \widetilde{\mu} \left[\xi^{2} \left(\frac{\partial^{2} \widetilde{u}_{3}}{\partial \widetilde{x}_{1}^{2}} + \frac{\partial^{2} \widetilde{u}_{3}}{\partial \widetilde{x}_{3}^{2}} \right) + \frac{\partial^{2} \widetilde{u}_{3}}{\partial \widetilde{x}_{2}^{2}} \right] - \left(\frac{\ell_{0}}{h} \right)^{2} \widetilde{\eta} \left[\xi^{4} \left(\frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{3}}{\partial \widetilde{x}_{1}^{4}} + \frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{3}}{\partial \widetilde{x}_{3}^{2}} \right) + \frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{3}}{\partial \widetilde{x}_{3}^{2}} \right] \right\} \\ + \frac{\partial^{2} \widetilde{u}_{3}}{\partial \widetilde{x}_{3}^{2}} - 2 \xi^{2} \left(\frac{\ell_{0}}{\ell_{0}} \right)^{2} \widetilde{\eta} \left[\frac{\ell_{0}}{\partial \widetilde{u}_{1}^{2}} + \frac{\ell_{0}^{2} \widetilde{u}_{1}^{2}}{\partial \widetilde{u}_{2}^{2}} \right] - \left(\frac{\ell_{0}}{\ell_{0}} \right)^{2} \widetilde{\eta} \left[\xi^{4} \left(\frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{3}}{\partial \widetilde{x}_{1}^{2}} + \frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{3}}{\partial \widetilde{x}_{3}^{2}} \right) \right] \right\}$$

où $\Re_h = \rho_0 \frac{Vh}{\mu_0}$ est le nombre de Reynolds local et $\xi = \frac{h}{L}$ est un paramètre d'échelle d'ordre 10^{-3} .

En négligeant les termes multipliés par ξ^2 et ξ^4 , il reste :

$$\begin{cases}
\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{x}_{i}} = -\xi \widetilde{\rho} \mathfrak{R}_{h} \frac{D\widetilde{u}_{i}}{D\widetilde{t}} + \widetilde{\mu} \frac{\partial^{2} \widetilde{u}_{i}}{\partial \widetilde{x}_{2}^{2}} - \widetilde{\eta} \left(\frac{\ell_{0}}{h}\right)^{2} \frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{i}}{\partial \widetilde{x}_{2}^{4}} & ; \qquad i = 1, 2 \\
\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{x}_{3}} = 0 & \longrightarrow \widetilde{p} = \widetilde{p} \left(\widetilde{x}_{1}, \widetilde{x}_{2}\right)
\end{cases} \tag{A3}$$

Si $\xi \Re_h <<1$, les termes d'inertie seront négligeables et l'Eq. (A3) se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{x}_{i}} = \widetilde{\mu} \frac{\partial^{2} \widetilde{u}_{i}}{\partial \widetilde{x}_{2}^{2}} - \widetilde{\eta} \left(\frac{\ell_{0}}{h} \right)^{2} \frac{\partial^{4} \widetilde{u}_{i}}{\partial \widetilde{x}_{2}^{4}} & i = 1, 2 \\ \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{x}_{3}} = 0 & \rightarrow \widetilde{p} = \widetilde{p} \left(\widetilde{x}_{1}, \widetilde{x}_{2} \right) \end{cases}$$
(A4)

En revenant aux variables dimensionnées, les équations (A4) deviennent :

$$\begin{cases}
\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4} - \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\
\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4} - \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x_2}
\end{cases}$$
(A5)

ou encore

$$\begin{cases}
\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - \eta \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4} = \frac{\partial p}{\partial x_1} \\
\mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - \eta \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4} = \frac{\partial p}{\partial x_2}
\end{cases}$$
(A6)