République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمـــهوريـــة الجـــزائـــريــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 mai 45 Guelma

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة 8 ماي 45 قالمة

Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation
مخبر الرياضيـــات التطبيقيـــة و النمذجـــة

Bilan Final du projet «PNR», N° 08

Intitulé du projet

Modélisation de l'atmosphère impliquant la transition de phase de l'eau

Etablissement de domiciliation

Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation « LMAM »

Université 8 mai 1945 Guelma

Agence Thématique de Recherche en Sciences et Technologie

Département de l'évaluation des projets de recherche

Table de matière

Introduction (Rappels de la problématique, des objectifs et des tâches à effectuer)

1. Rappel de la problématique

La modélisation mathématique des phénomènes atmosphériques comprenant les nuages et la précipitation est fort souhaitable pour les intérêts pratiques pour la météorologie et ’pour l’intérêt croissant sur le climat. Mais, à cause de la complexité du problème qui concerne la mécanique des fluides décrivant le déplacement de l’air ainsi que la microphysique décrivant la transition de phase de l’eau dans l’atmosphère, les modélisations mathématiques précédentes ([MD], [LTW], etc.) n’étaient pas satisfaisantes. Notre tâche est donc de proposer un modèle cohérent du point de vue mathématique ainsi que du point de vue physique pour le mouvement de l’atmosphère avec la transition de phase de l’eau. La cohérence mathématique d’une telle modélisation doit être examinée avant tout par la question : le système d’équations proposé est bien posé (c’est-à-dire, il admet une solution locale et une seule de manière continue par rapport aux données). Se pose également la question d’une éventuelle solution stationnaire ou globale dans le temps ; en outre les conditions aux limites posent des problèmes délicats. En outre pour tester la stabilité des phénomènes modélisés, il est utile d’examiner la mesure invariante pour les équations sous des perturbations stochastiques. On devra proposer des modèles des phénomènes locaux ou de situations particulières, ce qui servira également comme examen de la validité du modèle vis-à-vis de la réalité physique.

2. Objectifs

Le but de ce projet de recherche est de proposer, sur la base de la description physique des phénomènes atmosphériques et météorologiques, un modèle mathématique du mouvement de l’air avec la transition de phase de l’eau et de l’analyser du point de vue mathématique. La base de cette recherche est la théorie des équations de la mécanique des fluides, qui sont généralement des équations aux dérivées partielles non linéaires.
Notre travail principal est d’insérer de manière correcte dans ces équations les éléments de microphysique et de thermodynamique qui décrivent le processus de transition de phase de l’eau dans l’atmosphère et son conséquence comme la formation des nuages, la précipitation, le changement de la température dû à la chaleur latente. Nous devons examiner la cohérence mathématique des systèmes d’équations proposés et leur correspondance aux processus physiques réelles; en particulier nous devons proposer des systèmes d’équations modélisant des phénomènes particuliers ou locaux ainsi que des modèles stochastiques et ces modèles doivent être confrontés avec les réalités spécifiques y compris celles de l’environnement qui intéressent particulièrement les collectivités locales.

3. Tâches à effectuer

(1) Examiner la cohérence des modèles proposés sur le mouvement de l'air avec la transition de phase (condensation – évaporation) de l'eau et apporter d'éventuelles corrections à ces modèles.

Pour ce faire

(1-a) Etudier les processus microphysiques concernant la formation des gouttelettes et des morceaux de glace dans l'atmosphère et examiner la correction de la description des processus microphysiques dans les modèles proposés.

(1-b) Etudier, dans le cadre de la théorie des équations aux dérivées partielles, les équations de continuité pour la densité de l'eau en trois états.

(1-c) Chercher la solution stationnaire ou la solution globale dans le temps pour le système d'équations du modèle proposé sous des conditions convenables.

(1-d) Examiner la possibilité de poser les conditions aux limites qui correspondent à la situation réelle de l'atmosphère.

(1-e) Etudier les équations stochastiques de la dynamique des gaz.

(2) Proposer des modèles mathématiques pour les phénomènes locaux ou spécifiques comme la formation des nuages dans une zone marquée par la présence de montagnes ou la formation des cyclones sur la mer réchauffée.

(3) Ouvrir les discussions sur l'applicabilité des modèles proposés avec des physiciens, des météorologues et d'autres opérateurs intéressés.

Contenu du travail

1. Introduction

Nous rappelons que l'essentiel de notre travail consiste à construire un modèle mathématique suffisamment détaillé et suffisamment cohérent du point de vue mathématique comme du point de vue physique, modèle qui décrira le mouvement de l'atmosphère en tenant compte de la transition de phase de l'eau qui l'accompagne. Un ensemble de variantes à partir du modèle générale ont été traitées tel que le cas monodimensionnel et bidimensionnel correspondant à la chute de pluie en l'absence et présence d'un vent horizontal puis vertical (phénomène des orages).

2. Modèle mathématique général

2.1. Introduction

Nous proposons un modèle général du mouvement de l'atmosphère et des phénomènes atmosphériques et météorologiques comprenant la description des processus de transition de phase de l'eau et de montrer sa cohérence physique - mathématique.

Depuis quelques décennies il y a eu des tentatives de modélisation mathématique de l'atmosphère (voir par exemple [17], [15]). Même si ces tentatives étaient bien appréciables dans leurs aspects mathématiques spécifiques, dans ces modèles mathématiques la description globale des phénomènes atmosphériques comprenant la formation des nuages et la précipitation était loin d'être satisfaisante. Dans nos travaux [10], [1], [29], nous proposons un système d'équations qui résulte des équations du mouvement d'un gaz visqueux (voir [13]) en y ajoutant la description des processus de transition de phase de $\boldsymbol{H_2O}$ pour ce faire il faut distinguer la densité de l'air sec, celle de la vapeur d'eau, celle de l'eau liquide et celle de $\boldsymbol{H_2O}$ solidifiée. Pour un système légèrement modifié de ce système d'équations nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution locale.

2.2. Transition de phase de l'eau

Rappelons d'abord les aspects principaux de la transition de phase de $\boldsymbol{H_2O}$ dans l'atmosphère (voir [16], [26]). La condensation ou la sublimation inverse a lieu quand la pression partielle de la vapeur d'eau dans l'air dépasse la valeur critique dite pression de la vapeur saturée, notée $\overline{p}$ (par rapport au liquide) ou $\overline{p}$ (par rapport au solide), les valeurs $\overline{p} = \overline{p}(T)$ et $\overline{p} = \overline{p}(T)$ dépendent fortement de la température T. Or, pour notre raisonnement il sera commode d'utiliser, au lieu de la pression de la vapeur saturée, la *densité de la vapeur saturée*, notée $\overline{\pi}(T)$ (par rapport au liquide) ou $\overline{\pi}(T)$

(par rapport au solide), déterminée par la relation

$$\overline{\pi}(T) = \frac{\mu_h}{R_0 T}\overline{p}(T), \quad \overline{\pi}(T) = \frac{\mu_h}{R_0 T}\overline{p}(T),$$

où R_0 et μ_h sont respectivement la constante universelle des gaz et la masse molaire de $\boldsymbol{H_2O}$.

On rappelle également que la transition de phase de l'eau provoque l'échange de l'énergie, phénomène connu sous le nom de *chaleur latente*. Nous désignons par L_{gl}, L_{ls} et L_{gs} la chaleur latente relative à la transition gaz-liquide, liquide-solide et gaz-solide respectivement. Ces valeurs vérifient la relation

$$L_{gs} = L_{gl} + L_{ls}.$$

Pour les relations de physique statistique (voir [11], [26]) les gouttelettes de diamètre très petit ne sont pas présentes dans la Nature et la condensation de l'eau dans l'atmosphère se produit exclusivement sur les noyaux dits *aérosols*. En outre, on observe que dans l'atmosphère, même aux températures inférieures à $0^{o}C$, se forment d'abord les gouttelettes d'eau liquide et puis graduellement ces gouttelettes d'eau se solidifient. Une fois formée des morceaux de cristaux dans l'atmosphère, il y aura le processus de sublimation: de gaz en solide.

Pour décrire le mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau, nous considérons les quantités physiques suivant:

ρ : densité de l'air sec .
π : densité de la vapeur d'eau.
$\sigma_{l(m)}$: densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m .
$\sigma_{s(m)}$: densité de l'eau solidifiée contenue dans les morceaux de glace de masse m .
$v = (V_1, V_2, V_3)$: vitesse de l'air.
$u_{,}(m) = (u_{l,1}(m), u_{l,2}(m), u_{l,3}(m))$: vitesse des gouttelettes de masse m .
$u_s(m) = (u_{s,1}(m), u_{s,2}(m), u_{s,3}(m))$: vitesse des morceaux de glace de masse m .

T : température,
p : pression.
Ici, par l'air sec on entend toute la partie de l'air excepté les molécules de H_20 . Ces quantités sont à considérer comme fonctions de la position χ et du temps τ_1 . en outre $\sigma_{l(m)}, \sigma_{s(m)}, u_{,}(m), u_s(m)$ doivent dépendre également de la masse m de la gouttelette ou du morceau de glace.
Notre modélisation base avant tout sur les équations de la mécanique des fluides (voir par exemple [13]). Mais il est également essentiel de tenir compte des relations sp´ecifiques de la physique de l'atmosphère (voir par exemple [16], [26], [30]); voir aussi [11]) . Nous les rappelons ci-dessous.

- *<u>Densité de la vapeur saturée</u>*: A une température donnée T , on trouve la densité de saturation *pour* la vapeur d'eau, que nous notons $\overline{\pi}_{s,1}(T)$ quand elle est considérée sur la surface de l'eau liquide et $\overline{\pi}_{s,2}(T)$ quand elle est considérée sur la surface de l'eau solide (glace). La vapeur empirique de $\overline{\pi}_{s,1}(T)$ est

$$\overline{\pi}_{s,1}(T) \approx \frac{\mu_h}{R_0 T} E_0 . 10^{\frac{763(T-27315)}{T-3125}}, \; E_0 = 6.107 \quad (mbar).$$

(R_0 : la constante universelle des gaz, μ_h : la masse molaire de H_20) .

- *<u>Chaleur latente</u>* : la transition de phase de l'eau provoque la variation de l'énergie thermique. Pour décrire ce phénomène nous désignons par L_{gl} la chaleur latente relative à la transition gaz-liquide, par L_{ls} celle relative à la transition liquide-solide L_{gs} celle relative à la transition gaz-solide. On a

$$L_{gs} = L_{gl} + L_{ls}.$$

- *<u>Vitesse de la transition de phase</u>* : la transition de phase se produit avec une vitesse déterminée par les conditions physiques. On suppose que le taux de condensations/évaporation sur cette gouttelette de masse m est donné par

$$h_{gl}(T,\ \pi;m)=K_1m^{-1}S_l(m)(\pi-\overline{\pi}_{s,1}(T))$$

$S_l(m)$ étant la surface d'une gouttelettes de masse m,

$$S_l(m)=0 \quad pour \quad 0 \le m \le \frac{\overline{m}_a}{2} \ ,$$

$$S_l(m)=3^{\frac{2}{3}}(4\pi)^{\frac{1}{3}}m^{\frac{2}{3}} \quad pour \quad m \ge \overline{m}_A \ ,$$

où $\overline{m}_a$ et $\overline{m}_A$ sont la borne inférieure et la borne supérieure de la masse d'un aérosol susceptible d'être le noyau d'une gouttelette.

Analoguement on admet le taux de sublimation sur un morceau de glace de masse m donné par

$$h_{gs}(T,\ \pi;m) = K_2m^{-1}S_s(m)(\pi-\overline{\pi}_{s,2}(T)),$$

$S_s(m)$ étant la surface (approximative) d'un morceau de glace de masse m,

$$S_s(m) = 0 \quad pour \quad 0 \le m \le \frac{\overline{m}_a}{2} \ ,$$

$$S_s(m) \approx c_s m^{\frac{2}{3}} \quad pour \quad m \ge \overline{m}_A \ ,$$

$c_s \ge 3^{\frac{2}{3}}(4\pi)^{\frac{1}{3}}$. En outre nous désignons le taux de solidification par $K_{l,s}(T,\ m)$ et le taux de fusion par $K_{s,l}(T,\ m)$. Pour le taux de solidification il est bon de rappeler que, comme la structure cristalline est rare dans l'atmosphère, même aux températures inférieures à 0^oC se forment d'abord les gouttelettes d'eau liquide et ensuite elles se solidifient.

➢ *Apparition et disparition de gouttelettes et de morceaux de glace* : Comme dans la Nature ne sont pas présentes les gouttelettes très petites à cause de la courbure élevée de leur surface, qui causerait leur évaporation immédiate, et que donc les gouttelettes se forment exclusivement sur les aérosols, il nous convient d'introduire le taux d'apparition de nouvelles gouttelettes et ceux de disparition de gouttelettes et de morceaux de glace.

Nous supposons que le taux d'apparition de nouvelles gouttelettes de masse m est

$$g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\sigma,\ t[m])]^+[\pi-\overline{\pi}_s(T)]^+,$$

Où N^* est le nombre total de gouttelettes ou de morceaux de glace qui peuvent être formés dans l'unité de volume, $\tilde{N}$ est le nombre dans l'unité de volume des aérosols qui se trouvent déjà dans des gouttelettes ou dans des morceaux de glace. D'autre part, on suppose que le taux de disparition des gouttelettes de masse m et celui des morceaux de glace de masse m sont données respectivement par

$$g_1(m)[\pi-\overline{\pi}_s(T)]^-$$

et par

$$g_2(m)[\pi-\overline{\pi}_s(T)]^-$$

➢ *Coagulation* : Les gouttelettes et les morceaux de glace, quand elle se rencontre, peuvent former leur union. Pour décrire ce phénomène on considère la probabilité $\beta_l(m,\ m')$ de rencontre entre une gouttelette de masse m et une de masse m', la probabilité $\beta_s(m,\ m')$ de coagulation entre un morceau de glace de masse m et un de masse m' et la probabilité $Z_{ls}(m,\ m')$ de rencontre entre un morceau de glace de masse m et une gouttelette de masse m', qui engendre un morceau de glace de masse $m+m'$

Ce dernier type rencontre se produit généralement à une température inférieure à 0^oC et engendre seulement des morceaux de glace.

Compte tenu des relations citées ci-dessus, nous proposons le système d'équations suivant:

✓ **équation de la quantité de mouvement de l'air**

$$(\rho+\pi)(\frac{\partial_V}{\partial\tau}+(v.\nabla)v)=\eta\Delta v+(\zeta+\frac{\eta}{3})\nabla(\nabla.v)-R_0\nabla[(\frac{\rho}{\mu_a}+\frac{\pi}{\mu_h})T]+$$
$$-\int_0^\infty(\alpha_l(m)+\sigma_s(m))dm-(\rho+\pi)\nabla\phi$$

✓ **équation du bilan de l'énergie**

$$(\rho+\pi)C_{\iota/}(\frac{\partial T}{\partial\tau}+v.\nabla T)=$$
$$=\kappa\triangle T-R_0(\frac{\rho}{\mu_a}+\frac{\pi}{\mu_h})T\nabla.v+\eta\sum_{jj=1}^{3}(\frac{\partial v_j}{\partial xj}+\frac{\partial v_j}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{jj}\nabla.V)\frac{\partial v_j}{\partial xj}+$$
$$+\zeta(\nabla.v)^2+E_{rad}+L_{gl}H_{gl}+L_{ls}H_{ls}+L_{gs}H_{gs}$$

✓ **équation de continuité de l'air sec**

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau}+\nabla.(\rho_V)=0$$

✓ **équation de continuité de la vapeur d'eau**

$$\frac{\partial\pi}{\partial\tau}+\nabla.(\pi v)=-H_{gl}(T,\pi,\ \sigma_l(.\ ))\ -H_{gl}(T,\pi,\ \sigma_s(.))$$

✓ **équation de continuité de l'eau liquide**

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}+\nabla.(\sigma_{l^U/)}+\frac{\partial(mh_{g/}\sigma_l)}{\partial m}=$$
$$=[h_{g/}-K_{ls}(T,\ m)]\sigma,+K_{s/}(T,\ m)\sigma_s+g_0(m)[N*-\tilde{N}(\sigma_l,\ \sigma_s)]^+[\pi-\bar{\pi}_{s,1}(T)]^+-g_1(m)[\pi-\bar{\pi}_{s,1}(T)]^-\sigma_l)dm'$$
$$+\frac{m}{2}\int_0^m\beta_I(m-m',\ m')\sigma_l(m')\sigma_l(m-m')dm'$$
$$-m\int_0^\infty\beta_l(m,\ m')\sigma_l(m)\sigma_l(m')dm'-m\sigma_l(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m,\ m')\sigma_s(m')dm'$$

✓ **équation de continuité de l'eau solidifiée**

$$\frac{\partial\sigma_s}{\partial\tau}+\nabla.(\sigma_sU_5)+\frac{\partial(mh_{gs}\sigma_s)}{\partial m}=$$
$$=[h_{gs}-K_{s/}(T,\ m)]\sigma_s+K_{ls}(T,\ m)\sigma_l-g_2(m)[\pi-\bar{\pi}_{s,2}(T)]^-\sigma_s+$$
$$+\frac{m}{2}\int_0^m\beta_s(m-m',\ m')\sigma_s(m')\sigma_s(m-m')dm'$$
$$-m\int_0^\infty\beta_s(m,\ m')\sigma_s(m)\sigma_l(m')dm'+m\int_0^\infty Z_{ls}(m-m',\ m')\sigma_s(m-m')\sigma_l(m')d$$
$$-m\sigma_s(m)\int_0^\infty Z_{ls}(m,\ m')\sigma_l(m')dm'\ ,$$

La pression p est donnée implicitement par l'expression

$$p = R_0(\rho\mu_a^{-1} + \pi\mu_h^{-1})T$$

(μ_a : la masse molaire moyenne de l'air sec, μ_h : la masse molaire de l'eau). Pour la vitesse $u_l(m, ., .)$ des gouttelettes de masse m et la vitesse $u_s(m, ., .)$ des morceaux de glace de masse m, nous admettons l'approximation

$$u_l(m, x, T) = V(x, \tau) - (\alpha_l(m))^{-1}\nabla\phi ,$$
$$u_s(m, x, T) = V(x, \tau) - (\alpha_s(m))^{-1}\nabla\phi .$$

En outre H_{gl} et H_{gs} sont définis par

$$H_{gl}(T, \pi, \sigma_l(.)) = \int_0^\infty h_{gl}(m)\sigma_l(m)dm,$$

$$H_{gs}(T, \pi, \sigma_s(.)) = \int_0^\infty h_{gs}(m)\sigma_s(m)dm$$

Le symbole H_{gl} désigne la quantité totale de solidification ou de fusion d'eau, qui est la somme de différents processus de solidification et de fusion. En outre, η, ζ sont les coefficients de viscosité, κ est le coefficient de thermoconductibilité, $\alpha_l(m)$ (resp. $\alpha_s(m)$) l'effet de friction entre l'air et les gouttelettes (resp. morceaux de glace) de masse m, ϕ le géopotentiel.

2.3. Solution locale du système général

Les quantités physiques que nous avons à traiter sont la densité de l'air sec ρ, la densité de la vapeur d'eau π, la densité de l'eau liquide $\sigma_l(m)$ contenue dans les gouttelettes de masse m, la densité de lie u solidifiée $\sigma_s(m)$ contenue dans les morceaux de cristaux de masse m, la vitesse $v = (v_1, v_2, v_3)$ de l'air, la vitesse $u_l(m) = (u_{l,1}(m), u_{l,2}(m), u_{l,3}(m))$ des gouttelettes de masse m, la vitesse $u_s(m) = (u_{s,1}(m), u_{s,2}(m), u_{s,3}(m))$ des morceaux de cristaux de masse m, la température T et la pression p.

Nous rappelons que d'après les principes de la mécanique des fluides (voir [11]) et la description de la transition de phase de l'eau introduite ci-dessus, nous considérons :

L'équation de la quantité de mouvement de l'air

$$(3.1) \quad (\rho + \pi)(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v) = \eta \Delta v + (\zeta + \frac{\eta}{3})\nabla(\nabla \cdot v) +$$

$$-R_0\nabla((\frac{\rho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T) - [\int_0^\infty (\sigma_l(m) + \sigma_s(m))dm + \rho + \pi]\nabla\Phi,$$

L'équation du bilan de l'énergie

$$(3.2) \quad (\rho + \pi)c_v(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j}) = \kappa \Delta T - R_0(\frac{\rho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T\nabla \cdot \vec{v} +$$

$$+\eta \sum_{i,j=1}^3 (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla \cdot v)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta(\nabla \cdot v)^2 + E_{rad} + L_{gl}H_{gl} + L_{ls}H_{ls} + L_{gs}H_{gs},$$

L'équation de continuité de l'air sec

$$(3.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0,$$

L'équation de continuité de la vapeur d 'eau

$$(3.4) \quad \frac{\partial\pi}{\partial t} + \nabla\cdot(\pi v) = -H_{gl}(T,\pi,\sigma_l(\cdot)) - H_{gs}(T,\pi,\sigma_s(\cdot)),$$

L'équation de continuité de l'eau liquide

$$(3.5) \quad \frac{\partial\sigma_l}{\partial t} + \nabla\cdot(\sigma_l u_l) + \frac{\partial(m h_{gl}\sigma_l)}{\partial m} = [h_{gl} - K_{ls}(T,m)]\sigma_l + K_{sl}(T,m)\sigma_s +$$

$$+g_0(m)[N^* - \widetilde{N}(\sigma_l,\sigma_s)]^+[\pi - \overline{\pi}(T)]^+ - g_1(m)[\pi - \overline{\pi}(T)]^-\sigma_l +$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta_l\,(m-m',m')\sigma_l(m')\sigma_l(m-m')dm' - m\int_0^\infty \beta_l\,(m,m')\sigma_l(m)\sigma_l(m')dm' +$$

$$-m\sigma_l(m)\int_0^\infty Z_{ls}\,(m',m)\sigma_s(m')dm'$$

Et **l'équation de continuité des cristaux d 'eau**

$$(3.6) \quad \frac{\partial\sigma_s}{\partial t} + \nabla\cdot(\sigma_s u_s) + \frac{\partial(m h_{gs}\sigma_s)}{\partial m} =$$

$$= [h_{gs} - K_{sl}(T,m)]\sigma_s + K_{ls}(T,m)\sigma_l - g_2(m)[\pi - \overline{\pi}(T)]^-\sigma_s +$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta_s\,(m-m',m')\sigma_s(m')\sigma_s(m-m')dm' - m\int_0^\infty \beta_s\,(m,m')\sigma_s(m)\sigma_s(m')dm' +$$

$$+m\int_0^m Z_{ls}\,(m-m',m')\sigma_s(m-m')\sigma_l(m')dm' - m\sigma_s(m)\int_0^\infty Z_{ls}\,(m,m')\sigma_l(m')dm'.$$

Dans les équations $(3.1)-(3.2)$ la pression p est donnée implicitement par l'expression

$$p = R_0(\rho\mu_a^{-1} + \pi\mu_h^{-1})T$$

(μ_a : la masse molaire moyenne de l'air sec, μ_h : la masse molaire de l'eau). Pour la vitesse $u_l(m,\cdot,\cdot)$ des gouttelettes de masse m et la vitesse $u_s(m,\cdot,\cdot)$ des morceaux de cristaux de masse m, nous admettons qu'elles sont données par les relations

$$(3.7) \quad u_l(m,x,t) = v(x,t) - ((y_l(m))^{-1}\nabla\Phi,$$

$$(3.8) \quad u_s(m,x,t) = v(x,t) - ((y_s(m))^{-1}\nabla\Phi.$$

D'autre part $h_{gl}(m)$ et $h_{gs}(m)$ désignent la quantité de la condensation/évaporation sur une gouttelette et celle de sublimation sur un morceau de cristal de H_2O et ont la forme

$$(3.8) \quad h_{gl}(m) = h_{gl}(T,\pi;m) = K_1 m^{-1} S_l(m)(\pi - \overline{\pi}(T)),$$

$$(3.10) \quad h_{gs}(m) = h_{gs}(T,\pi;m) = K_2 m^{-1} S_s(m)(\pi - \overline{\pi}(T)),$$

où K_1 et K_2 sont les coefficients de la vitesse de condensation ou d 'évaporation et de celle de sublimation (en deux directions). Les fonctions $H_{gl}(T,\pi,\sigma(\cdot))$ et $H_{gs}(T,\pi,\sigma(\cdot))$ désignent la quantité totale de la condensation (ou évaporation) et celle de sublimation inverse de gaz en solide (ou sublimation de solide en gaz) de H_2O et ont la forme $H_{gl}(T,\pi,\sigma_l(\cdot)) = \int_0^\infty h_{gl}(m)\sigma_l(m)dm$, $H_{gs}(T,\pi,\sigma_s(\cdot)) = \int_0^\infty h_{gs}(m)\sigma_s(m)dm$, Le symbole H_{ls} désigne la quantité totale de solidification ou de fusion de l'eau, qui est la somme de différents processus de solidification (et de fusion). En outre, η, ζ sont les coefficients de viscosité, κ est le coefficient de thermoconductibilité, $(y_l(m)1$ 'effet de friction entre l'air et les gouttelettes de masse m, Φ le géopotentiel, E_{rad} la contribution de la radiation, $\beta(m,m')$ la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse m et une de masse m', $\beta_l(m,m')$ la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse m et une

de masse m', $\beta_s(m,m')$ la probabilité de rencontre entre un morceau de cristal de H_2O de masse m et un de masse m', rencontre qui engendre l'union de des deux morceaux, K_{ls} et K_{sl} sont les coefficients de solidification et de fusion, et $Z_{ls}(m,m')$ est la probabilité de rencontre entre un morceau de cristal de H_2O de masse m et une gouttelette de masse m'.

2.4. Existence et unicité de la solution locale

Considérons maintenant le cas du système d 'équations dans un domaine $\Omega \subset R^3$ borné muni d'une frontière régulière avec trois états de H_2O. Nous posons les conditions aux limites

$$(4.1) \quad v|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$(4.2) \quad T|_{\partial\Omega} = \overline{T} \in W_q^{2-\frac{1}{q},1-\frac{1}{2q}}(\partial\Omega \times]0,\ t_1\ [\ ),\ \ \inf \overline{T}(x,t) > 0,\ t_1 > 0.$$

D'autre part pour les conditions initiales on suppose que

$$(4.3) \quad v(\cdot,0) = v_0(\cdot) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega),\ v_0|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$(4.4) \quad T(\cdot,0) = T_0(\cdot) \in W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega),\ \ \inf T_0(x) > 0,\ T_0|_{\partial\Omega} = \overline{T}|_{t=0},$$

$$(4.5) \quad \rho(\cdot,0) = \rho_0(\cdot) \in W_p^1(\Omega),\ \ \inf \rho_0(x) > 0,$$

$$(4.6) \quad \pi(\cdot,0) = \pi_0(\cdot) \in W_p^1(\Omega),\ \ \inf \pi_0(x) > 0,$$

$$(4.7) \quad \sigma_l(\cdot,\cdot,0) = \sigma_{l,0}(\cdot,\ ) \in W_p^1(R_+ \times \Omega),\ \sigma_{l,0}(\cdot;\cdot) \geq 0,$$

$$(4.8) \quad \sigma_s(\cdot,\cdot,0) = \sigma_{s,0}(\cdot,\ ) \in W_p^1(R_+ \times \Omega),\ \sigma_{s,0}(\cdot;\cdot) \geq 0,$$

$$(4.9) \quad \exists \overline{M} \geq m_a - \text{ tel que } \sigma_{l,0}(m,x) = \sigma_{s,0}(m,x) = 0 \text{ si } m \in]0,\ m_a-] \cup [\overline{M},\ \infty[.$$

Pour les fonctions Φ et E_{rad} nous supposons que

$$(4.10)\ \Phi \in C^3(\Omega),\ \nabla\Phi \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \ (\ n \text{ est le vecteur normal à } \partial\Omega),$$

$$(4.11) \quad E_{rad} \in L^q(\Omega \times]0,\ t_1\ [\ ).$$

D'autre part, pour les fonctions $(y_l(m)$, $(y_s(m)$, $K_{ls}(T,m)$, $K_{sl}(T,m)$, $g_0(m)$, $g_1(m)$, $g_2(m)$, $\beta_l(m,m')$, $\beta_s(m,m')$, $Z_{ls}(m,m'),\overline{\pi}(T)e\overline{\pi}(T)$, nous admettons que chaque fonction est de classe C^2 par rapport à ses arguments, à valeurs non-négatives (et $(y_l(m)$, $(y_s(m)$, $\overline{\pi}(T),\overline{\pi}(T)$ sont strictement positives) et majorée par une constante ou, si elle dépend de T, par $c_1 + c_2T$ avec deux constantes c_1 et c_2; en outre on suppose qu'il existe une constante $\overline{M} < \infty$ telle que

$$(4.12) \quad \beta_l(m',m'') = \beta_s(m',m'') = Z_{ls}(m',m'') = 0 \text{ pour } m' + m'' \geq \overline{M}.$$

Sous ces conditions on a :

Théorème : *Soient* $p > 4, 2q > p > q > 3$. *Alors il existe un* $\bar{t} > 0$ *tel que le système d'équations* $(3.1) - (3.5)$ *avec la substitution de* h_{gl} *et* H_{gl} *au lieu de* h_{gl} *et* H_{gl} *et avec les conditions aux limites* $(4.1) - (4.2)$ *et les conditions initiales* $(4.3) - (4.9)$ *admette, dans l'intervalle de temps* $[0,t]$, *une solution* $(v, T, \rho, \pi, \sigma_l, \sigma_s)$ *et une seule dans la classe*

$$(4.13) \quad v \in W_p^{2,1}(Q_{\bar{t}}),\ T \in W_q^{2,1}(Q_{\bar{t}}),\ T > 0,$$

$$\rho \in C^0([0,t]; W_p^1(\Omega)),\ \inf \rho(x,t) > 0,$$

$$\pi \in C^0([0,t]; W_p^1(\Omega)),\ \pi \geq 0,\ \sigma_l,\ \sigma_s \in C^0([0,t]; W_p^1(R_+ \times \Omega)),\ \sigma_l,\ \sigma_s \geq 0,$$

où

$$\|\phi\|_{W_r^{2,1}(Q_t)} = \|\phi\|_{L^r(0,t;W_r^2(\Omega))} + \|\partial_t\phi\|_{L^r(Q_t)},\ Q_t = \Omega \times]0,\ t[.$$

L'idée principale de la Démonstration du théorème A est d'estimer ρ, π, σ_l, σ_s dans $W_p^1(\Omega)$ et d'utiliser les techniques développées dans [32] (voir aussi [14]).

3. Modèle de la gouttelette en chute

La pluie (Orage, grêle, ...) est une conséquence de la condensation de la vapeur d'eau dans l'atmosphère et de la formation de gouttelettes qui chutent lorsqu'elles deviennent suffisamment grandes grâce au processus de coagulation. La condensation de $H_2 0$ se produit quand la densité de la vapeur est supérieure à la densité de la vapeur saturée, tandis que l'évaporation aura lieu dans le cas contraire. Dans cette transition de phase, la variation de la température joue un rôle essentiel pour la condensation-évaporation.

Nous présentons quelques résultats concernant la chute des gouttelettes en présence du vent (phénomène pluie), ainsi que la variation de l'eau dans les régions désertiques et son corollaire qui est l'apparition du phénomène « Orage ».

3.1. Equations des gouttelettes en chute (cas stationnaire avec le vent horizontal)

1. Introduction

Nous allons considérer des gouttelettes qui, se coagulant avec une certaine probabilité, tombent avec une vitesse qui sera déterminée par la force gravitationnelle, la friction entre ces gouttelettes et l'air ainsi que la vitesse de ce dernier.

Les gouttelettes considérées doivent être distribuées selon la masse m de chacune d'elles, tandis que la friction avec 1'air, ainsi que la probabilité de coagulation, dépend de la masse m. Ici nous nous limitons à considérer l'état stationnaire avec un vent horizontal constant, en renvoyant l'analyse de cas plus généraux aux études futures.

Du point de vue technique, nous allons considérer une équation intégro-différentielle pour une fonction inconnue $\sigma = \sigma(m, x, z)$ représentant la densité (par rapport au volume de l'air) de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m. Nous considérons σ comme une fonction dépendante de la masse (de la gouttelette) m et de la position $(x, z) \in \mathbb{R}^2$; comme nous supposons que le mouvement de l'air en considération est un vent horizontal constant, la position dans la direction horizontale et orthogonale à la direction du vent ne nous intéresse pas particulièrement. L'équation dans la forme précise va être formulée dans le paragraphe suivant (voir (2.4)).

Dans ce qui suit, nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation avec une condition aux limites dans les cas respectivement de l'absence du vent (vitesse du vent nulle) et de la présence du vent (vitesse du vent non nulle).

2. Position du problème

Désignons par $\sigma(m, x, z, t)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m au point $(x, z) \in \Omega(\subset \mathbb{R}^2)$ à l'instant $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire, la masse de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m qui se trouvent dans l'unité de volume de l'air. Le nombre, au sens purement statistique, des gouttelettes de masse m dans l'unité de volume sera alors donné par

$$\tilde{n}(m, x, z, t) = \frac{\sigma(m,x,z,t)}{m}.$$

L'équation de Smoluchowski est normalement formulée par rapport au nombre $\tilde{n} = \tilde{n}(m,t)$ de gouttelettes de masse m. Mais nous préférons utiliser la densité σ pour la commodité pour la modélisation générale des phénomènes météorologiques (voir [10], [1], [29]).

Nous allons considérer la densité σ dans le domaine

$$(2.1) \qquad \Omega = \mathbb{R} \times]0,1[= \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 | 0 < z < 1\}.$$

On va considérer également la vitesse des gouttelettes qui se déplacent à cause de la force gravitationnelle et du mouvement de l'air dans lequel elles se trouvent. Comme l'effet de la friction entre les gouttelettes et l'air dépend sensiblement de la masse de chaque gouttelette, la vitesse des gouttelettes doit être en fonction de la masse m. Nous admettons que la vitesse $u = u(m)$ d'une gouttelette de masse m est donnée par

$$(2.2) \qquad u = u(m) = (\overline{v}, -\frac{g}{(y(m)}),$$

où $\overline{v}$ et g sont des constantes $(\overline{v} \in \mathbb{R}, g > 0)$, tandis que $(y(m)$ est une fonction de la masse $m((y(m) > 0)$. Si g, $(y(m)$ et $\overline{v}$ désignent respectivement l'accélération gravitationnelle, le coefficient de friction entre les gouttelettes et l'air et la vitesse de l'air (dans la direction de l'axe x), la relation (2.2) correspond, dans une bonne approximation, à la vitesse réelle des gouttelettes dans l'atmosphère (voir par exemple [30], [1], [29]).

Si nous considérons la variation de $\sigma(m,x,z,t)$ due au déplacement avec la vitesse

$u(m)$ des gouttelettes et au processus de coagulation, nous aurons

$$(2.3) \qquad \partial_t \sigma(m,x,z,t) + \nabla_{(x,z)} \cdot (\sigma(m,x,z,t)u(m)) =$$

$$= \frac{m}{2}\int_0^m \beta\,(m-m',m')\sigma(m,x,z,t)\sigma(m-m',x,z,t)dm' +$$

$$-m\int_0^\infty \beta\,(m,m')\sigma(m,x,z,t)\sigma(m',x,z,t)dm',$$

où $\nabla_{(x,z)} = (\partial_x, \partial_z)$, tandis que $\beta(m_1,m_2)$ représente la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse m_1 et une gouttelette de masse m_2 (avec la valeur de la probabilité normalisée par rapport à la masse). Si dans l'équation (2.3) on néglige la dépendance de $(x,z) \in \Omega$, l'équation sera réduite à l'équation de Smoluchowski (dans une version avec la densité $\sigma(m,t) = m\tilde{n}(m,t)$).

En renvoyant l'étude de l'équation d'évolution (2.3) à des recherches futures, dans le présent travail nous allons nous occuper du cas stationnaire, c'est-à-dire, nous allons considérer l'équation

$$(2.4) \qquad \nabla_{(x,z)} \cdot (\sigma(m,x,z)u(m)) =$$

$$= \frac{m}{2}\int_0^m \beta\,(m-m',m')\sigma(m',x,z)\sigma(m-m',x,z)dm' +$$

$$-m\int_0^\infty \beta\,(m,m')\sigma(m,x,z)\sigma(m',x,z)dm'$$

avec la condition

$$(2.5)\qquad \sigma(m,x,1)=\overline{\sigma}(m,x).$$

Comme les gouttelettes tombent de $\{z=1\}$ vers $\{z=0\}$ avec la vitesse $u=u(m)$ (voir (2.2)), la condition (2.5) est une condition “initiale” (ou condition d‘entrée) pour les gouttelettes qui partent de la position $(x,1)$.

On rappelle que dans la Nature, à cause de la courbure très élevée de la surface, les gouttelettes très petites $s'évaporent$ immédiatement (voir par exemple [11], [6]) et que d’autre part les gouttelettes très grandes se fragmentent à cause de la friction avec l’air environnant. Pour cela, nous nous intéressons à la fonction de densité $\sigma(m,x,z)$ avec m entre deux extrémités $\overline{m}$ et $\overline{m}$, $0<\overline{m}\leq m\leq\overline{m}<\infty$.

En ce qui concerne la fonction $(y(m)$, qui représenterait l’effet de la friction entre les gouttelettes et l’air, dans le présent travail nous supposons que $(y(m)$ est une fonction strictement positive et suffisamment régulière (par exemple $(y(m)\in C^1(\mathbb{R}_+))$. Il est utile de rappeler que dans l’état normal de l’atmosphère $(y(m)$ est une fonction décroissante et ses valeurs varient sensiblement selon les valeurs de m (pour les données expérimentales, voir par exemple [30]). Même si l’effet de la friction (par l’unité de masse) croit rapidement quand m s’approche de 0, compte tenu de l’absence de gouttelettes très petites $(m<\overline{m})$, pour éviter le raisonnement inutilement compliqué, nous supposons que $\sup\alpha(m)<\infty$.

Pour la fonction $\beta(m_1,m_2)$ nous supposons que

(2.6) $\beta(\cdot,\ )\in C(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+),\ \beta(m_1,m_2)\geq 0\forall(m_1,m_2)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+,$

(2.7) $\beta(m_1,m_2)=\beta(m_2,m_1)$

(2.8) $\beta(m_1,m_2)=0$ pour $m_1+m_2\geq\overline{m}.$

Les conditions (2.6) et (2.7) sont des conditions naturelles de la fonction de probabilité de rencontre de gouttelettes. D‘autre part, la condition (2.8) est une approximation motivée par le fait que, comme nous l’avons déjà évoqué, dans l’atmosphère les grandes gouttelettes subissent également le processus de fragmentation, qui contrebalance la croissance de la population de gouttelettes de masse élevée due à la coagulation (cette approximation a été adoptée même dans [10], [1], [29]).

3. Cas de l’absence du mouvement de l’air

Dans le cas où $\overline{v}=0$, le problème $(2.4)-(2.5)$ se réduit à une famille deproblèmes dans le domaine $0<z<1$, paramétrisée par $x\in\mathbb{R}$. En effet, si $\overline{v}=0$, $u(m)$ se réduit à

$$u(m)=(0,-\tfrac{g}{(y(m)}),$$

ce qui nous permet d‘envisager le problème $(2.4)-(2.5)$ séparément pour chaque $x\in\mathbb{R}$.

Donc, en posant $\overline{\sigma}(m)=\overline{\sigma}(m,x)$ pour chaque $x\in\mathbb{R}$ et en écrivant $\sigma(m,z)$ au lieu de $\sigma(m,x,z)$, nous avons à considérer

$$(3.1)\qquad -\partial_z(\sigma(m,z)\tfrac{g}{(y(m)})=\tfrac{m}{2}\int_0^m\beta\,(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm'+$$

$$-m\int_0^{\infty}\beta\,(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm',$$

$$(3.2)\qquad \sigma(m,1)=\overline{\sigma}(m).$$

Comme $(y(m)$ ne dépend pas de z, l'équation (3.1) peut être écrite dans la forme

$$(3.3)\qquad \partial_z\sigma(m,z)=-\frac{m(y(m)}{2g}\int_0^m\beta\,(m-m^{'},m^{'})\sigma(m^{'},z)\sigma(m-m^{'},z)dm^{'}+$$

$$+\frac{m(y(m)}{g}\int_0^{\infty}\beta\,(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'.$$

Avant de nous occuper de la solution du problème $(3.1)-(3.2)$, rappelons une propriété importante de l'opérateur intégral figurant au second membre de (3.1).

Lemme 3.1. *Soit* $\beta(\cdot,\,)$ *la fonction introduite dans le paragraphe précédent. Alors, quelque soit* $\sigma(\cdot)\in L^1(\mathbb{R}_+)$, *on a*

$$(3.4)\qquad \int_0^{\infty}\frac{m}{2}\int_0^m\beta\,(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm'dm+$$

$$-\int_0^{\infty}m\int_0^{\infty}\beta\,(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm=0.$$

Démonstration. En faisant le changement de variables

$$q=m-m',\ r=m',$$

dont le déterminant Jacobien est égal à 1, on a

$$\int_0^{\infty}\frac{m}{2}\int_0^m\beta\,(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm'dm=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{q+r}{2}\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)drdq.$$

Par conséquent, compte tenu de la symétrie de la fonction β

$$\beta(q,r)=\beta(r,q),$$

on a

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{q+r}{2}\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)drdq=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}q\,\beta(q,r)\sigma(q)\sigma(r)drdq=$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}m\,\beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'dm,$$

d'où on obtient (3.4).

L'égalité (3.4) n'est autre que la loi de la conservation de la masse pour l'eau liquide contenue dans les gouttelettes.

Proposition 3.1. *Soit* $\overline{\sigma}(\cdot)\in L^1(\mathbb{R}_+)$ *avec* $supp(\overline{\sigma})\subset[\overline{m},\overline{m}]$. *Alors le problème* $(3.1)-(3.2)$ *admet une unique solution* $\sigma\in C([0,1];L^1(\mathbb{R}_+))$ *(c'est-à-dire, l'application* $z\sigma(\cdot,z)$ *est une fonction continue de* $[0,1]$ *à valeurs dans* $L^1(\mathbb{R}_+)$*).*

Démonstration. Pour résoudre le problème $(3.1)-(3.2)$, on considère $\sigma(\cdot,z)$ comme élément de $L^1(\mathbb{R}_+)$, de sorte que l'équation (3.3) peut être écrite dans la forme

$$(3.5) \quad \frac{d\sigma}{dz} = F(\sigma),$$

où

$$F(\sigma) = F(\sigma)(m) = -\frac{m(y(m)}{2g}\int_0^m \beta\,(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm' +$$

$$+\frac{m(y(m)}{g}\int_0^\infty \beta\,(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'.$$

Posons

$$(3.6) \quad C_\beta = \max\,[\,\sup \frac{m(y(m)}{2g}\beta(m-m^{'},m^{'}), \sup \frac{m(y(m)}{g}\beta(m,m^{'})].$$

Alors, en rappelant l'expression de $F(\sigma)$, on a, pour $\sigma_1,\ \sigma_2 \in L^1(\mathbb{R}_+)$,

$$(3.7) \quad \|F(\sigma_1)-F(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty |\,F(\sigma_1)(m)-F(\sigma_2)(m)|dm \leq$$

$$\leq C_\beta \int_0^\infty \int_0^m |\,\sigma_1(m')(\sigma_1(m-m')-\sigma_2(m-m')) + (\sigma_1(m')-\sigma_2(m'))\sigma_2(m-m')|dm'dm +$$

$$+C_\beta \int_0^\infty \int_0^\infty |\,(\sigma_1(m)(\sigma_1(m')-\sigma_2(m')) + (\sigma_1(m)-\sigma_2(m))\sigma_2(m')|dm'dm \leq$$

$$\leq C_\beta\ (\|\sigma_1 *\ (|\sigma_1-\sigma_2|)\|_{L^1} + \|(|\sigma_1-\sigma_2|) *\ \sigma_2\|_{L^1}) +$$

$$+C_\beta \int_0^\infty (\,|\sigma_1(m)|\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^1} + |\sigma_1(m)-\sigma_2(m)|\|\sigma_2\|_{L^1})dm \leq$$

$$\leq 2C_\beta\|\sigma_1-\sigma_2\|_{L^1}(\|\sigma_1\|_{L^1}+\|\sigma_2\|_{L^1})$$

(pour la propriété de la convolution, voir par exemple [2]), ce qui montre que $F(\cdot)$ vérifie localement la condition de Lipchitz dans la topologie de $L^1(\mathbb{R}_+)$. Par conséquent, l'équation (3.5) avec la condition initiale (3.2) admet une solution $\sigma(\cdot,z)$ et une seule dans un intervalle $1-\delta \leq z \leq 1$ avec un $\delta > 0$ suffisamment petit.

D'autre part, du lemme 3.1 et de l'équation (3.1) on déduit que

$$(3.8) \quad \int_0^\infty (\,\sigma(m,z)\frac{g}{(y(m)})dm = \int_0^\infty (\,\sigma(m,1)\frac{g}{(y(m)})dm,$$

pourvu que $\sigma(\cdot,z)$ existe. Or, la condition (2.8) et l'hypothèse $supp(\overline{\sigma}) \subset [\overline{m},\overline{m}]$ impliquent que $supp(\sigma *\ z)) \subset [\overline{m},\overline{m}]$. Donc, de la relation

$$0 < c_1 \leq \frac{g}{(y(m)} \leq c_2 < \infty\ \ \forall m \in [\overline{m},\overline{m}]$$

avec deux constantes $c_1,\ c_2$ on déduit que $\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$ est uniformément bornée en z (pourvu que $\sigma\ (\ \cdot, z)$ existe), ce qui, joint à la condition de Lipschitz locale, nous donne la solution $\sigma(\cdot,z)$ de l'équation (3.5) dans tout l'intervalle $[0,1]$. La proposition est démontrée.

4. Préliminaires pour le cas général

Pour résoudre l'équation (2.4) avec la condition (2.5) $(\sigma(m,x,1)=\overline{\sigma}(m,x))$, nous allons utiliser l'idée de transformer l'équation (2.4) en une équation différentielle ordinaire, comme dans la Démonstration de la proposition 3.1, où on a transformé l'équation (3.1) en (3.5). Pour cela, nous introduisons le changement de variables $(m,x,z)\mapsto(\widetilde{m},\xi,\tilde{z})$ défini par

$$\begin{cases}\widetilde{m}=m,\\ \xi=x-\overline{v}\dfrac{\alpha(m)}{g}(1-z),\\ \tilde{z}=z.\end{cases}$$

et définissons

$$\tilde{\sigma}(\widetilde{m},\xi,\tilde{z})=\sigma(m,x,z)=\sigma(m,\xi+\overline{v}\tfrac{(y(m)}{g}(1-z),z).$$

Dans la suite, toutefois, pour éviter la notation lourde, on va écrire simplement m et z au lieu de $\widetilde{m}$ et $\tilde{z}$ et encore $\sigma(m,\xi,z)$ au lieu de $\tilde{\sigma}(\widetilde{m},\xi,\tilde{z})$, ce qui ne cause pas d'équivoque dans le calcul. Comme on peut le constater facilement, dans les coordonnées (m,ξ,z) l'équation (2.4) se transforme en

$$(4.1)\quad \tfrac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,z)=$$

$$=-\frac{m(y(m)}{2g}\int_0^m\beta\,(m-m',m')\sigma(m',\eta(m,m',\xi,z),z)\sigma(m-m',\eta(m,m-m',\xi,z),z)dm'+$$

$$+\tfrac{m(y(m)}{g}\int_0^\infty\beta\,(m,m')\sigma(m,\xi,z)\sigma(m',\eta(m,m',\xi,z),z)dm',$$

où

$$\eta(m,m',\xi,z)=\xi+\overline{v}\tfrac{(y(m)-(y(m')}{g}(1-z).$$

Pour reformuler l'équation (4.1) en une équation différentielle ordinaire et établir des propriétés utiles de l'opérateur intégral du deuxième membre de cette équation, il nous convient, pour chaque $z\in[0,1]$ fixé, d'introduire la famille de courbes

$$(4.2)\quad \gamma_\tau=\{(m,\xi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}|\xi=\tau-\overline{v}\tfrac{(y(m)}{g}(1-z)\},\ \tau\in\mathbb{R}$$

et de définir une mesure sur ces courbes.

Désignons par $P_{\mathbb{R}_+}$ la projection de γ_τ sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire, pour les sous-ensembles $A^{'}$ de γ_τ, on a

$$P_{\mathbb{R}_+}A^{'}=\{m\in\mathbb{R}_+|\exists\xi\ \text{tel que}\ (\ m,\ \xi)\in A'\}.$$

La régularité de la fonction $\xi(m) = \tau - \overline{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$ nous permet de définir les ensembles mesurables de γ_τ et la mesure μ_γ sur γ_τ par les relations suivantes :

$i)$ $A^{'} \subset \gamma_\tau$ est mesurable si et seulement si $P_{\mathbb{R}_+}A^{'}$ est mesurable selon Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$,

ii) $\mu_\gamma(A^{'}) = \mu_{L,\mathbb{R}_+}(P_{\mathbb{R}_+}A^{'})$, où $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme les courbes γ_τ, $\tau \in \mathbb{R}$, sont parallèles (c'est-à-dire, définies par la translation de γ_0 par τ dans la direction de ξ, on voit immédiatement que la projection $P_{\mathbb{R}_+}$ et la mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ ne dépendent pas de $\tau \in \mathbb{R}$.

La mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ étant définie sur les courbes γ_τ, nous allons éclaircir les relations entre $\mu_\gamma(\cdot)$ et la mesure sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Pour ce faire, on pose

$$\tau(m,\xi) = \xi + \overline{v}\frac{(y(m)}{g}(1-z)$$

(c'est-à-dire, $\tau\ (\ m,\ \xi)$ est $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $(m,\ \xi) \in \gamma_\tau$) et on considère la famille $\mathfrak{U}$ des ensembles A ayant la forme

$$(4.3) \qquad A = \{(m,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | m \in [m_1,\ m_2\ [,\ \tau(m,\xi) \in [\tau_1,\ \tau_2\ [,\ \}$$

avec $0 \leq m_1 \leq m_2 < \infty$, $-\infty < \tau_1 \leq \tau_2 < \infty$. Si on définit la fonction $\tilde{\mu} : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}_+$ par la relation

$$\tilde{\mu}(A) = (m_2 - m_1)(\tau_2 - \tau_1)$$

pour $A = \{(m,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | m \in [m_1,\ m_2[,\ \tau(m,\xi) \in [\tau_1,\ \tau_2[\}$, on constate que, de la même manière que la construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à partir de la famille des rectangles, le prolongement de $\tilde{\mu}$ définit les ensembles mesurables selon $\tilde{\mu}$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et la mesure sur eux, mesure que nous notons toujours $\tilde{\mu}$, et que $\tilde{\mu}$ coïncide avec la mesure de Lebesgue $\mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$; on a en effet

$$\tilde{\mu}(A) = \mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(A)$$

pour $A \in \mathfrak{U}$.

Pour les mesures μ_γ et $\tilde{\mu}$ ainsi définies et les mesures de Lebesgue $\mu_{L,\mathbb{R}_+}$, $\mu_{L,\mathbb{R}}$ et $\mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}$ respectivement sur $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a les relations suivantes.

Lemme 4.1. *Soit A un ensemble mesurable* (*selon Lebesgue*) *de* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. *On pose*

$$A_\tau = \{m \in \mathbb{R}_+ | \exists \xi \in \mathbb{R} \text{ tel que } (\ m,\ \xi) \in \gamma_\tau \cap A\},$$

$$A_m = \{\tau \in \mathbb{R} | \exists \xi \in \mathbb{R} \text{ tel que } (\ m,\ \xi) \in \gamma_\tau \cap A\}.$$

Alors on a

$$(4.4) \qquad \mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(A) = \tilde{\mu}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_\gamma(A_\tau)d\tau = \int_{\gamma 0} \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)\mu_\gamma(dm) = \int_0^{\infty} \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)dm$$

(ici et dans la suite l'élément d'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue $s'écrit$ directement dm, $d\tau$ etc... sans utiliser les notations $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(dm)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(d\tau)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(d\xi)$ etc...).

Lemme 4.2. *Soit* $\sigma(m,\xi) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. *Alors, pour tout* $\tau \in \mathbb{R}$ *la restriction de* $\sigma(m,\xi)$ *à* γ_τ *appartient à* $L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$.

Lemme 4.3 *Soit* $\sigma(m,\xi) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. *Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma\,(m,\xi)dmd\xi = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma\,(m,\xi)d\tilde{\mu} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{\gamma_\tau} \sigma\,(m,\xi)\mu_\gamma(dm))d\tau = \int_{\gamma 0} (\int_{-\infty}^{\infty} \sigma\,(m,\xi(m,\tau))d\tau)\mu_\gamma(dm) =$$

$$= \int_0^\infty (\int_{-\infty}^{\infty} \sigma\,(m,\xi)d\xi)dm = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_0^\infty \sigma\,(m,\xi)dm)d\xi,$$

où $\xi(m,\tau) = \tau - \overline{v}\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)$.

Pour la Démonstration des lemmes 4.1, 4.2 et 4.3, il suffit d'effectuer les modifications formelles nécessaires aux Démonstrations des théorèmes classiques sur le produit des mesures et de Fubini (voir par exemple [12]), en tenant compte de la définition formulée ci-dessus des mesures μ_γ et $\tilde{\mu}$.

Maintenant on est en mesure de transformer l'équation (4.1) en une équation différentielle ordinaire. Pour cela on pose

$$\tau(m,\xi,z) = \xi + \overline{v}\frac{(y(m)}{g}(1-z),\ \gamma_\tau^{[0,m]} = \gamma_\tau \cap [0,m] \times \mathbb{R}.$$

Cela étant, on peut écrire l'équation (4.1) dans la forme

$$(4.5) \quad \frac{\partial}{\partial z}\sigma(z) = F_z(\sigma(z)),\ \sigma(z) = \sigma(\cdot,\cdot,z),$$

avec

$$F_z(\sigma(z)) = F_z(\sigma(z))(m,\xi) =$$

$$= -\frac{m(y(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,z)}} \beta\,(m-m',m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m-m',\eta',z)\mu_\gamma(dm') +$$

$$+\frac{m(y(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,z)}} \beta\,(m,m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m,\xi,z)\mu_\gamma(dm'),$$

où η' et η' sont tels que

$$(m',\eta') \in \gamma_{\tau(m,\xi,z)},\ (m-m',\eta') \in \gamma_{\tau(m,\xi,z)}.$$

L'équation (4.5) doit être envisagée avec la condition (2.5), c'est-à-dire

$$(4.6)\quad \sigma(1) = \sigma(m,\xi,1) = \overline{\sigma}(m,\xi).$$

5. Existence et unicité de la solution dans le cas général

Pour démontrer Existence et l'unicité de la solution du problème $(4.5)-(4.6)$, nous avons besoin de préciser des conditions sur $\overline{\sigma}(m,\xi)$. Nous supposons que

$$(5.1)\quad \overline{\sigma}(\cdot,\ ) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}),$$

$$(5.2)\quad \overline{\sigma}(m,\xi) \geq 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

$$(5.3)\quad supp(\overline{\sigma}) \subset [\overline{m},\overline{m}] \times \mathbb{R},$$

$$(5.4)\quad \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} < \frac{1}{M_1(\overline{m}-\overline{m})},$$

où

$$(5.5)\quad M_1 = 2\overline{m} \leq m \leq \overline{m} \leq m' \leq m - \overline{m} s_{\frac{u}{m}}p \frac{m(y(m)}{2g}\beta(m-m',m').$$

Ici $\overline{m}$ et $\overline{m}(0<\overline{m}<\overline{m}<\infty)$ sont les deux nombres que l'on a introduits dans le paragraphe 2. On a *alors* le résultat suivant.

Proposition 5.1. *Si* $\overline{\sigma}(m,\xi)$ *satisfait aux conditions* $(5.1)-(5.4)$, *alors l'équation* (4.5) *avec la condition* (4.6) *admet une solution* σ *et une seule dans la classe*

$$(5.6)\quad \sigma \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})) \times L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,1]).$$

Pour démontrer la proposition 5.1, $commencons$ par la propriété de la convolution sur les courbes γ_τ.

Lemme 5.1. *Soient* f *et* g *deux fonctions appartenant à* $L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)$. *On pose*

$$(f * g)(m) = \int_{\gamma_\tau} f(m-m')g(m')\mu_\gamma(dm').$$

Alors on a $f * g \in L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)$ *et*

$$\|f * g\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \leq \|f\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\|g\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}.$$

Comme la mesure μ_γ ne dépend pas de τ, le lemme 5.1 est vérifié de la même manière pour tous τ.

Démonstration. La mesure μ_γ étant bien définie sur γ_τ, le lemme se démontre de la même manière (avec des modifications purement formelles) que dans le cas des fonctions sommables par rapport à la mesure de Lebesgue (voir par exemple [4]).

A différence du cas $v=0$ (proposition 3.1) où on a considéré la solution $\sigma(\cdot,z)$ comme fonction de z à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+)$, pour la proposition 5.1 on a besoin de construire la solution $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ comme fonction de z à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$. Pour ce faire, il nous convient d 'examiner directement l'approximation successive avec laquelle on construit la solution $\sigma(m,\xi,z)$.

Posons

$$(5.7) \quad \sigma^{[0]}(m,\xi,z) = \overline{\sigma}(m,\xi)$$

et définissons $\sigma^{[n]}$, $n = 1,2, \cdots$, par les relations

$$(5.8) \quad \frac{\partial}{\partial z}\sigma^{[n]} = F_z(\sigma^{[n-1]}),$$

où $F_z(\cdot)$ est l'opérateur défini dans (4.5).

$$\sigma^{[n]}(m,\xi,1) = \overline{\sigma}(m,\xi),$$

Lemme 5.2 *Quelque soit* $\in \mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ *est bien définie dans la classe*

$$\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}),\ 0 \le z \le 1,$$

et on a

$$(5.9) \quad supp(\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)) \subset [\overline{m},\overline{m}] \times \mathbb{R}\ pour\ 0 \le z \le 1,$$

$$(5.10) \quad \|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \le \frac{\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1-(M_1+M_2)(\overline{m}-\overline{m})\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(1-z)}$$

pour $\frac{(M_1+M_2)(\overline{m}-\overline{m})||\overline{\sigma}\|_{L(R\times R)}{}^{\infty+-1}}{(M_1+M_2)(\overline{m}-\overline{m})\|\overline{\sigma}\|_{L(R\times R)}{}^{\infty+}} < z \le 1$, *où*

$$(5.11) \quad M_2 = \sup \frac{m(y(m)}{g}\beta(m,m').$$

Démonstration. Remarquons d'abord que, si $\sigma^{[n]}$ $(n \ge 1)$ est bien définie par les relations (5.8) et si $supp(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)) \subset [\overline{m},\overline{m}] \times \mathbb{R}$ pour $0 \le z \le 1$, alors $\sigma^{[n]}$ vérifie la condition (5.9). En effet, la condition (2.8) implique que la première intégrale de l'opérateur $F_z(\cdot)$ (voir (4.5)) s'annule pour $m \ge \overline{m}$. D'autre part, si $m < \overline{m}$, alors sous le signe d'intégration $\sigma^{[n-1]}(m-m',\cdot,z)$ et $\sigma^{[n-1]}(m',\cdot,z)$ s'annule et donc l'intégrale s'annule. En outre par hypothèse $\sigma^{[n-1]}$ s'annule pour $m < \overline{m}$ et $m > \overline{m}$, ce qui implique que même la seconde intégrale de l'opérateur $F_z(\cdot)$ s'annule pour $m < \overline{m}$ et $m > \overline{m}$.

On en déduit (5.9) pour $\sigma^{[n]}$.

Examinons maintenant l'opérateur $F_z(\cdot)$ appliqué à $\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)$. En supposant que le support de $\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)$ est contenu dans $[\overline{m},\overline{m}] \times \mathbb{R}$ et en rappelant (5.5) et (5.11), on a (avec la notation η', η' comme dans (4.5))

$$|\frac{m(y(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,z)}} \beta\,(m-m',m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m-m',\eta',z)\mu_\gamma(dm')| \le$$

$$\le M_1(\overline{m}-\overline{m})\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|^2_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,z)},\mu_\gamma)},$$

$$|\frac{m(y(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,z)}} \beta\,(m,m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m,\xi,z)\mu_\gamma(dm')| \le$$

$$\leq M_2(\overline{m}-\overline{m})\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|^2_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,z)},\mu_\gamma)},$$

où M_1 et M_2 sont les constantes définies dans (5.5) et (5.11) respectivement. On en déduit que, pour $\sigma^{[n]}$ définie par

$$\sigma^{[n]}(m,\xi,z)=\overline{\sigma}(m,\xi)-\int_z^1 F_{z'}(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z'))(m,\xi)dz',$$

on a

$$(5.12)\quad \|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\leq$$

$$\leq \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}+(M_1+M_2)(\overline{m}-\overline{m})\int_z^1\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z')\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}dz'.$$

En outre, en utilisant le lemme 5.1 et en tenant compte de la condition (2.8), on a

$$\|\frac{m(y(m)}{2g}\int_{\gamma_\tau^{[0,m]}}\beta\,(m-m',m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m-m',\eta',z)\mu_\gamma(dm')\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}+$$

$$+\|\frac{m(y(m)}{g}\int_{\gamma_\tau}\beta\,(m,m')\sigma^{[n-1]}(m',\eta',z)\sigma^{[n-1]}(m,\eta,z)\mu_\gamma(dm')\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\leq$$

$$\leq C\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)|_{\gamma_\tau}\|^2_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)},$$

où C est une constante indépendante de z (et η, η' et η' sont tels que (m,η), (m',η'), $(m-m',\eta')\in\gamma_\tau$ comme dans (4.5)). Comme on a en outre

$$\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)|_{\gamma_\tau}\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\leq(\overline{m}-\overline{m})\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)|_{\gamma_\tau}\|_{L^\infty(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\leq$$

$\leq(\overline{m}-\overline{m})\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}$ (pour presque tout $\tau\in\mathbb{R}$), à l'aide du lemme 4.3 on en déduit que

$$(5.13)\quad \|F_z(\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z))\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\leq C'\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\|\sigma^{[n-1]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}$$

avec une constante C' indépendante de z.

Définissons une suite de fonctions $y_n(z)$, $0\leq z\leq 1$, $n\in\mathbb{N}$, par les relations récursives

$$(5.14)\quad y_0(z)=\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\ \text{pour}\ 0\leq z\leq 1,$$

$$(5.15)\quad y_n(z)=\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}+(M_1+M_2)(\overline{m}-\overline{m})\int_z^1 y_{n-1}(z')^2dz'$$

pour $0\leq z\leq 1$, $n=1,2,\cdots$

On va démontrer par l'induction mathématique que, quelque soit $\in\mathbb{N}$, la fonction $\sigma^{[n]}$ est bien définie et vérifie, outre la condition (5.9), les relations

$$(5.16)\quad \|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}\leq y_n(z),$$

$$(5.17) \qquad \sup \|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} < \infty.$$

En effet, pour $= 0$, les relations (5.9), (5.16) et (5.17) résultent immédiatement de la définition (5.7) et des hypothèses (5.1) et (5.3).

Supposons maintenant que $\sigma^{[n-1]}$ vérifie les relations (5.9), (5.16) et (5.17) (dans les quelles on substitue naturellement $n\ -1$ à la place de n). Nous avons déjà remarqué que dans ces hypothèses, $\sigma^{[n]}$ vérifie la condition (5.9). D'autre part, comme on le constate facilement, l'inégalité (5.16) résulte de la définition de y_n et de l'inégalité (5.12). Enfin, l'inégalité (5.13), jointe à la définition (5.8) de $\sigma^{[n]}$ et l'hypothèse sur $\sigma^{[n-1]}$, implique que $\sigma^{[n]}$ vérifie également (5.17).

On remarque que la suite $\{y_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \leq z \leq 1$, est une suite croissante et est l'approximation successive de la solution $Y(z)$ du problème de Cauchy (pour $z \leq 1$)

$$Y^{'}(z) = -(M_1 + M_2)(\overline{m} - \overline{m})Y(z)^2,\ Y(1) = \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}.$$

La fonction $Y(z)$ a la forme explicite

$$Y(z) = \frac{\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1 - (M_1 + M_2)(\overline{m} - \overline{m})\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(1 - z)}$$

pour $\frac{(M_1+M_2)(\overline{m}-\overline{m})||\overline{\sigma}\|_{L(R\times R)}{}^{\infty}+-1}{(M_1+M_2)(\overline{m}-\overline{m})\|\overline{\sigma}\|_{L(R\times R)}{}^{\infty}+} < z \leq 1$, ce qui nous permet de démontrer que (5.16) implique l'inégalité (5.10). Le lemme est démontré.

Maintenant nous allons démontrer la proposition 5.1.

Démonstration de la proposition 5.1. Nous allons démontrer avant tout l'existence et l'unicité de la solution dans un intervalle $[1-\delta, 1]$ avec $\delta > 0$ suffisamment petit.

Considérons deux fonctions σ_1 et σ_2 appartenant à $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et la différence $F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)$. D'après le lemme 4.3 on a

$$(5.18) \qquad \|F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} | F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)| dmd\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{\gamma_\tau} | F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)|\mu_\gamma(dm))d\tau.$$

Or, on a

$$\int_{\gamma_\tau} | F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)|\mu_\gamma(dm) =$$

$$= \int_{\gamma_\tau} | \frac{m(y(m)}{2g} \int_{\gamma_\tau^{[0,m]}} Q_1\,(m,m')\mu_\gamma(dm') - \frac{m(y(m)}{g} \int_{\gamma_\tau} Q_2\,(m,m')\mu_\gamma(dm')|\mu_\gamma(dm),$$

où

$$Q_1(m,m') = \beta(m-m',m')(\sigma_1(m',\eta')\sigma_1(m-m',\eta') - \sigma_2(m',\eta')\sigma_2(m-m',\eta')),$$

$$Q_2(m,m') = \beta(m,m')(\sigma_1(m,\eta)\sigma_1(m',\eta') - \sigma_2(m,\eta)\sigma_2(m',\eta')),$$

$$(m,\eta),\ (m',\eta'),\ (m-m',\eta'') \in \gamma_\tau \text{ (comme dans (4.5))}.$$

Donc, en raisonnant de la même manière que dans (3.7) et en appliquant le lemme 5.1, on obtient

$$(5.19) \quad \int_{\gamma_\tau} | F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)|\mu_\gamma(dm) \leq$$

$$\leq 2C_\beta \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}(\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}),$$

où C_β est la constante définie dans (3.6). Encore une fois à l'aide di lemme 4.3, on déduit de (5.18) et (5.19) que

$$(5.20) \quad \|F_z(\sigma_1) - F_z(\sigma_2)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq 2C_\beta ess \sup (\|\sigma_1\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} + \|\sigma_2\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)})\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}.$$

Maintenant on substitue $\sigma_1 = \sigma^{[n]}$ et $\sigma_2 = \sigma^{[n-1]}$ dans (5.20). Alors en vertu de (5.10) (voir aussi (5.9)) on a

$$(5.21) \quad \|F_z(\sigma^{[n]}) - F_z(\sigma^{[n-1]})\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq \Lambda_\sigma(z)\|\sigma^{[n]} - \sigma^{[n-1]}\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})},$$

$$\Lambda_\sigma(z) = 4C_\beta(\overline{m} - \overline{m})\frac{\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1-(M_1+M_2)(\overline{m}-\overline{m})\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(1-z)}.$$

C'est-à-dire, parmi les fonctions $\sigma^{[n]}$, $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur $F_z(\cdot)$ satisfait à la condition de Lipschitz dans l'espace $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ avec le coefficient de Lipschitz $\Lambda_\sigma(z)$. Donc, de la même manière que pour la Démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution locale d'une équation différentielle ordinaire, on peut démontrer qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $\sigma^{[n]}$ converge, quand n tend vers l'infini, vers une fonction σ dans la topologie de $C([1-\delta,1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))$ et que la limite σ satisfait, dans l'intervalle $[1-\delta,1]$, à l'équation (4.5) et à la condition (4.6). On voit aisément que l'unicité de la solution σ dans l'intervalle $[1-\delta,1]$ se démontre d'une manière analogue à la Démonstration du théorème classique.

Une fois obtenue la solution locale σ dans l'intervalle $[1-\delta,1]$, examinons ses propriétés.

Avant tout on remarque que (5.9) pour tout $n \in \mathbb{N}$ implique que la limite de la suite $\sigma^{[n]}$ jouit de la même propriété, c'est-à-dire on a

$$(5.22) \quad supp(\sigma) \subset [\overline{m},\overline{m}] \times \mathbb{R} \times [1-\delta,1].$$

D'autre part, pourvu que $\sigma \geq 0$, la première intégrale de l'opérateur $F_z(\cdot)$ (voir (4.5)) est négative (≤ 0), tandis que la seconde intégrale de $F_z(\cdot)$ est de la forme

$$\sigma(m,\xi,z)\frac{m(y(m)}{g}\int_0^\infty \beta\,(m,m')\sigma(m',\eta(m,m',\xi,z),z)dm'.$$

Donc de manière analogue aux cas des équations différentielles ordinaires, on peut démontrer que

$$(5.23) \quad \sigma \geq 0 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [1-\delta,1].$$

Les relations (5.22) et (5.23) étant démontrées, on peut refaire l'estimation de $\|\sigma(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}$. Pour cela on considère le deuxième membre $F_z(\sigma(z))$ de (4.5). En vertu de (5.23) on a

$$\frac{m(y(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,z)}}\beta\,(m,m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m,\xi,z)\mu_\gamma(dm')\geq 0,$$

ce qui nous permet de déduire de (4.5) que

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,z)\geq -\frac{m(y(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,z)}}\beta\,(m-m',m')\sigma(m',\eta',z)\sigma(m-m',\eta',z)\mu_\gamma(dm'),$$

ou

$$(5.24)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,z)\geq -M_1\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,z)}}\sigma\,(m',\eta',z)\sigma(m-m',\eta',z)\mu_\gamma(dm')$$

(ici η' et η' sont comme dans (4.5)). Donc, si on pose

$$\phi(z)=\|\sigma(\cdot,\cdot;z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})},$$

alors, compte tenu de (5.22), il résulte de (5.24) que

$$(5.25)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,z)\geq -M_1(\overline{m}-\overline{m})\phi(z)^2 \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R},$$

ou

$$\sigma(m,\xi,z)\leq\overline{\sigma}(m,\xi)+M_1(\overline{m}-\overline{m})\int_z^1\phi\,(z')^2dz' \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R},$$

d'où

$$\phi(z)\leq\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}+M_1(\overline{m}-\overline{m})\int_z^1\phi\,(z')^2dz' \text{ p.p. dans } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}.$$

Cette inégalité implique que

$$(5.26)\qquad \|\sigma(\cdot,\cdot;z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}=\phi(z)\leq\tilde{Y}(z)$$

pour $z\leq 1$ dans l'intervalle de l'existence de $\sigma(\cdot,\cdot;z)$ et de $\tilde{Y}(z)$, où $\tilde{Y}(z)$ est la solution de l'équation intégrale

$$\tilde{Y}(z)=\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}+M_1(\overline{m}-\overline{m})\int_z^1\tilde{Y}\,(z')^2dz',$$

ou, ce qui revient au même, du problème de Cauchy

$$\frac{d\tilde{Y}(z)}{dz}=-M_1(\overline{m}-\overline{m})\tilde{Y}(z)^2,\ \tilde{Y}(1)=\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}.$$

On a d'ailleurs

$$(5.27)\qquad \tilde{Y}(z)=\frac{\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1-\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}M_1(\overline{m}-\overline{m})(1-z)}.$$

On rappelle que la condition (5.4) implique que le deuxième membre de (5.27) est bien défini pour tout $z \in [0,1]$. Donc l'inégalité (5.26) est valable pour tout $z \in [0,1]$ tel que $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ existe.

Rappelons que l'on a construit la solution locale $\sigma(\cdot,\cdot;z)$ dans un intervalle $[1-\delta,1]$ et que l'on peut prolonger la solution $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ pour tout l'intervalle où les conditions pour la construction de la solution locale continuent à être vérifiées. Or, de (5.20) on déduit que, si $\|\sigma(\cdot,\cdot;z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} < \infty$, alors on peut encore prolonger la solution. Par conséquent, en vertu de (5.26) et (5.27), la solution $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ peut être prolongée dans tout l'intervalle $[0,1]$.

L'unicité de la solution résulte de l'unicité de la solution locale, ce qui achève la démonstration de la proposition.

3.2. Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute (cas d'évolution)

1. Introduction

Nous considérons le processus des gouttelettes qui tombent dans l'air et se coagulent entre elles. Du point de vue mathématique, il s'agit de l'équation de type Smoluchowski (voir [31], [22], [33]) avec le déplacement des gouttelettes déterminé par leur masse, l'équation est formulée pour la densité $\sigma(m,t,z)$ de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m (t et z désignent le temps et la position), densité par rapport à l'unité de volume de l'air contenant d'éventuelles gouttelettes. Dans le travail [19] on a démontré l'existence d'une solution stationnaire même en présence d'un vent horizontal.

Nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution globale de cette équation dans un domaine d'une dimension spatiale; on aura comme corollaire la convergence de la solution globale vers la solution stationnaire, si la donnée de l'entrée est constante ou tend vers une entrée constante.

Du point de vue technique, le présent travail utilise plusieurs techniques développées dans [19], en particulier l'introduction de la famille de courbes sur lesquelles on considère l'opérateur intégral de coagulation, et leurs propriétés. Toutefois, pour obtenir la solution globale on a $d\hat{u}$ établir un lemme qui précise le cône de dépendance" de la solution.

Nous rappelons que, pour le processus de coagulation sans déplacement des gouttelettes, c'est-à-dire l'équation de Smoluchowski ordinaire, et le processus de coagulation-fragmentation, il y a une littérature considérable (voir par exemple [33], [20], [7], [21], [5], [6], [23]). Dans une recherche future on pourrait chercher des conditions plus faibles pour le coefficient de coagulation ou l'introduction de fragmentation en suivant des idées de ces travaux. Une autre perspective de la recherche sera celle d'insérer le processus de coagulation et la chute des gouttelettes dans le modèle général du mouvement de l'atmosphère, comme l'on a essayé dans [10], [1], [29].

2. Position du problème

Considérons l'intervalle $[0,1]$, qui représente l'espace "vertical" dans lequel les gouttelettes se déplacent à cause de la force gravitationnelle. Désignons par $\sigma(m,t,z)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m au point $z \in [0,1]$ à l'instant $t \in \mathbb{R}$. On rappelle que dans la littérature concernant l'équation de Smoluchowski on utilise souvent le nombre (dans le sens statistique) $\tilde{n} = \tilde{n}(m,t) = \frac{\sigma(m,t,z)}{m}$ de gouttelettes de masse m au lieu de la densité de l'eau liquide $\sigma(m,t,z)$. Mais nous préférons utiliser cette dernière pour être conforme au symbolisme de [8] et de la littérature de la modélisation générale des phénomènes météorologiques ([10], [1], [29]).

Nous supposons que les gouttelettes subissent le processus de coagulation et en même temps se déplacent dans l'air par la force gravitationnelle en subissant également l'effet de frottement avec l'air environnant. Dans le présent travail nous ne considérons pas l'éventuelle condensation de la vapeur d 'eau sur les gouttelettes ni l'évaporation à partir des gouttelettes, l'absence de condensation et l'évaporation correspondrait à l'état l'équilibre entre la vapeur d'eau présente dans l'air et la densité de la vapeur saturée.

Dans cette situation, on peut formuler le processus de coagulation comme dans l'équation de Smoluchowski (voir par exemple [33]) et le déplacement des gouttelettes par une vitesse déterminée par le coefficient de frottement entre les gouttelettes et l'air (comme les météorologues l'utilisent communément, voir par exemple [30]). Ces considérations nous amènent à l'équation (voir [1], [29], [19])

$$(2.1) \qquad \partial_t\sigma(m,t,z) + \partial_z(\sigma(m,t,z)u(m)) =$$

$$= \frac{m}{2}\int_0^m \beta\,(m-m',m')\sigma(m',t,z)\sigma(m-m',t,z)dm' +$$

$$-m\int_0^\infty \beta\,(m,m')\sigma(m,t,z)\sigma(m',t,z)dm',$$

où $\beta(m_1,m_2)$ est la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse m_1 et une

de masse m_2 (avec la valeur de probabilité normalisée par rapport à la masse), tandis

que $u(m)$ désigne la vitesse des gouttelettes de masse m. Pour la fonction $\beta(m_1,m_2)$ nous supposons que

$$(2.2) \qquad \beta(\cdot,\ ) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+),\ \beta(m_1,m_2) \geq 0 \forall (m_1,m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

$$(2.3) \qquad \beta(m_1,m_2) = \beta(m_2,m_1).$$

D'autre part, pour la fonction $u(m)$ nous donnons aussi l'expression

$$(2.4) \qquad u(m) = -\frac{1}{(y(m)}g,$$

où $(y(m)$ est le coefficient de frottement entre les gouttelettes de masse m et l'air.

Comme dans la nature il n'existe pas de gouttelettes de masse inférieure à certaine

valeur critique (voir [26], [11]) et que les grandes gouttelettes subissent le processus de fragmentation, nous considérons seulement les fonctions $\sigma(m,t,z)n$ 'ayant les valeurs strictement positives que pour m tels que

$$0 < \overline{m} < m < \overline{m} < \infty,$$

ce qui nous permet de supposer, sans restreindre la généralité, que

$$(2.5) \qquad \sup \alpha(m) < \infty,$$

$$(2.6) \qquad \beta(m_1, m_2) = 0 \ \text{ pour } \ m_1 + m_2 \geq \overline{m},$$

comme il a été admis dans [1], [19]. Pour la commodité de la notation, nous posons

$$(2.7) \quad \overline{\alpha} = \sup \alpha(m), \ \overline{u} = -\frac{g}{\overline{\alpha}}.$$

Dans la suite nous allons envisager le problème de trouver une fonction $\sigma(m, t, z)$, qui vérifie l'équation (2.1) pour $(m, t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ avec la condition aux limites (condition d'entrée)

$$(2.8) \quad \sigma(m, t, 1) = \overline{\sigma}(m, t),$$

et la condition initiale

$$(2.9) \quad \sigma(m, 0, z) = \overline{\overline{\sigma}}(m, z).$$

Conformément à ce que nous avons dit plus haut, on supposera que

$$\overline{\sigma}(m, t) = \overline{\overline{\sigma}}(m, z) = 0 \ \text{ pour } \ \in [0, \overline{m}] \cup [\overline{m}, \ \infty[.$$

3. Préliminaires

Pour résoudre l'équation (2.1) avec les conditions (2.8), (2.9), nous allons la transformer en une équation différentielle ordinaire, en introduisant les variables $(\widetilde{m}, \tilde{t}, \tilde{z})$ reliées à (m, t, z) par les relations

$$(3.1) \ \begin{cases} \widetilde{m} = m, \\ \tilde{z} = z, \\ \tilde{t} = t + \frac{1-z}{u(m)}. \end{cases}$$

Dans ce nouveau système de coordonnées la fonction inconnue à chercher serait

$$\tilde{\sigma}(\widetilde{m}, \tilde{t}, \tilde{z}) = \sigma(m, t, z) = \sigma(m, \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)}, z).$$

Mais pour éviter une notation trop lourde, dans la suite on va écrire simplement m et z au lieu de $\widetilde{m}$ et $\tilde{z}$ et encore $\sigma(m, \tilde{t}, z)$ au lieu de $\tilde{\sigma}(\widetilde{m}, \tilde{t}, \tilde{z})$, ce qui ne causera pas d'équivoque dans le calcul.

On constate que dans les coordonnées $(m, \tilde{t}, z)$ l'équation (2.1) se transforme en

$$(3.2) \quad \frac{\partial}{\partial z}\sigma(m, \tilde{t}, z) =$$

$$= \frac{m}{2u(m)} \int_0^m \beta\,(m - m', m')\sigma(m', \tilde{t}(m, m', \tilde{t}, z), z)\sigma(m - m', \tilde{t}(m, m - m', \tilde{t}, z), z)dm' +$$

$$-\frac{m}{u(m)} \int_0^\infty \beta\,(m, m')\sigma(m, \tilde{t}, z)\sigma(m', \tilde{t}(m, m', \tilde{t}, z), z)dm',$$

où

$$\tilde{t}(m,m',\tilde{t},z) = \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)} + \frac{1-z}{u(m')}.$$

Nous allons reformuler l'équation (3.2) en une équation différentielle ordinaire à valeurs dans un espace de Banach (ou dans un espace de Fréchet). Pour traiter convenablement dans ce cadre fonctionnel l'opérateur intégral du deuxième membre de cette équation, nous introduisons, pour chaque $z \in [0,1]$ fixé, la famille de courbes

$$(3.3) \qquad \gamma_\tau = \gamma_{\tau,z} = \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | \tilde{t} = \tau + \frac{1-z}{u(m)}\}, \ \tau \in \mathbb{R}.$$

Cette famille de courbes est analogue à celle utilisée dans [19], mais ici le paramètre τ est relatif au temps, tandis que dans [8] les courbes étaient para métrisées par un paramètre spatial.

De manière analogue à [19] on définit une mesure μ_γ sur les courbes γ_τ. Plus précisément, en désignant par $P_{\mathbb{R}_+}$ la projection de γ_τ sur $\mathbb{R}_+$, on définit les nsembles mesurables de γ_τ et la mesure μ_γ sur γ_τ par les relations i) $A^{'} \subset \gamma_\tau$ est mesurable si et seulement si $P_{\mathbb{R}_+}A^{'}$ est mesurable selon Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, ii) $\mu_\gamma(A^{'}) = \mu_{L,\mathbb{R}_+}(P_{\mathbb{R}_+}A^{'})$, où $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme les courbes γ_τ, $\tau \in \mathbb{R}$, sont parallèles (c'est-à-dire, définies par la translation de γ_0 par τ dans la direction de $\tilde{t}$), on voit immédiatement que la projection $P_{\mathbb{R}_+}$ et la mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ ne dépendent pas de $\tau \in \mathbb{R}$.

On rappelle que la mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ a les propriétés suivantes.

Lemme 3.1. *Soit A un ensemble mesurable* (*selon Lebesgue*) *de* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. *On pose*

$A_\tau = \{m \in \mathbb{R}_+ | \exists \tilde{t} \in \mathbb{R} \ \textit{tel que} \ (m,\tilde{t}) \in \gamma_\tau \cap A\},$

$A_m = \{\tau \in \mathbb{R} | \exists \tilde{t} \in \mathbb{R} \ \textit{tel que} \ (m,\tilde{t}) \in \gamma_\tau \cap A\}.$

Alors on a

$$(3.4) \qquad \mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_\gamma(A_\tau) d\tau = \int_{\gamma 0} \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)\mu_\gamma(dm) = \int_0^\infty \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)dm,$$

(ici et dans la suite l'élément d 'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue s'écrit directement dm, $d\tau$ etc... sans utiliser les notations $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(dm)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(d\tau)$, etc...).

Lemme 3.2. *Soit* $\sigma(m,\tilde{t}) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. *Alors, pour presque tout* $\tau \in \mathbb{R}$ *la restriction de* $\sigma(m,\tilde{t})$ *à* γ_τ *appartient à* $L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$.

Lemme 3.3 *Soit* $\sigma(m,\tilde{t}) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. *Alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \sigma(m,\tilde{t}) dm d\tilde{t} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\gamma_\tau} \sigma(m,\tilde{t})\mu_\gamma(dm) \right) d\tau =$$

$$= \int_{\gamma 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(m,\tilde{t}(m,\tau)) d\tau \right) \mu_\gamma(dm) = \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(m,\tilde{t}) d\tilde{t} \right) dm =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_0^{\infty} \sigma\,(m, \tilde{t}) dm) d\tilde{t},$$

$$\textit{où}\ \ \tilde{t}(m, \tau) = \tau + \tfrac{1-z}{u(m)}.$$

Lemme 3.4. *Soient* f *et* g *deux fonctions appartenant à* $L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$. *On pose*

$$(f * g)(m) = \int_{\gamma_\tau} f\,(m - m') g(m') \mu_\gamma(dm').$$

Alors on a $f * g \in L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)$ *et*

$$\|f * g\|_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)} \leq \|f\|_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)} \|g\|_{L^1(\gamma_\tau, \mu_\gamma)}.$$

Pour la Démonstration des lemmes 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4, voir [19] (pour les notions fondamentales, voir par exemple [12]).

On pose

$$(3.5) \qquad \tau(m, \tilde{t}, z) = \tilde{t} - \tfrac{1-z}{u(m)},\ \gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)}^{[0,m]} = \gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)} \cap [0, m] \times \mathbb{R}.$$

Cela étant, on peut écrire l'équation (3.2) dans la forme

$$(3.6) \qquad \tfrac{\partial}{\partial z} \sigma(z) = F_z(\sigma(z)),$$

avec

$$\sigma(z) = \sigma(\cdot,\cdot, z),$$

$$(3.7) \qquad F_z(\sigma(z)) = F_z(\sigma(z))(m, \tilde{t}) =$$

$$= \frac{m}{2u(m)} \int_{\gamma_{\tau(m,\bar{t},z)}^{[0,m]}} \beta\,(m - m', m') \sigma(m', \tilde{t}, z) \sigma(m - m', \tilde{t}, z) \mu_\gamma(dm') +$$

$$- \tfrac{m}{u(m)} \int_{\gamma_{\tau(m,\bar{t},z)}} \beta\,(m, m') \sigma(m', \tilde{t}, z) \sigma(m, \tilde{t}, z) \mu_\gamma(dm'),$$

où $\tilde{t}$ et $\tilde{t}$ sont définis par les relations

$$(m', \tilde{t}) \in \gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)},\ \ (m - m', \tilde{t}) \in \gamma_{\tau(m,\tilde{t},z)}^{[0,m]}.$$

Analoguement, les conditions (2.8) et (2.9) se transforment en

$$(3.8) \qquad \sigma(m, \tilde{t}, 1) = \overline{\sigma}(m, \tilde{t}),$$

$$(3.9) \qquad \sigma(m, \tfrac{1-z}{u(m)}, z) = \overline{\sigma}(m, z),$$

où $\overline{\sigma}$ et $\overline{\sigma}$ sont les fonctions obtenues de $\overline{\sigma}$ et $\overline{\sigma}$ par le changement de variables introduit ci-dessus.

4. Solution avec la condition d'entrée de classe L^1

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution globale du problème $(3.6) - (3.9)$, nous précisons d'abord que le domaine dans lequel nous allons considérer l'équation (3.6) est

$$(4.1) \qquad \Omega = \cup_{\tau>0,0<z<1} \gamma_{\tau,z} = \{(m,\tilde{t},z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times]0,1[| \tilde{t} > \tfrac{1-z}{u(m)}\}.$$

On pose

$$\Gamma_a^1 = \{(m,\tilde{t},z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,1] | \tilde{t} = \tfrac{1-z}{u(m)}\},$$

$$\Gamma_b^1 = \{z = 1\} \cap \overline{\Omega},$$

il est évident que l'on peut identifier Γ_b^1 avec $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Les conditions (3.8) et (3.9) peuvent être écrites dans la forme

$$(4.2) \qquad \sigma = \overline{\sigma} \text{ sur } \Gamma_b^1, \ \sigma = \overline{\sigma} \text{ sur } \Gamma_a^1,$$

Avant d'étudier le cas général du problème $(3.6) - (3.9)$, nous allons examiner le cas où la donnée $\overline{\sigma}$ appartient à $L^1(\Gamma_b^1)$. Dans ce cas on a la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Soient* $\overline{\sigma} \in L^1(\Gamma_a^1) \cap L^\infty(\Gamma_a^1)$ *et* $\overline{\sigma} \in L^1(\Gamma_b^1) \cap L^\infty(\Gamma_b^1)$ *telles que*

$$\overline{\sigma}(m,\tilde{t},z) \geq 0 \ \ p.p. \, sur \ \Gamma_a^1, \ \overline{\sigma}(m,\tilde{t}) \geq 0 \ \ p.p. \, sur \ \Gamma_b^1,$$

$$\overline{\sigma}(m,\tilde{t},z) = 0, \ \overline{\sigma}(m,\tilde{t}) = 0 \ \ pour m \in [0,\overline{m}] \cup [\overline{m}, \ \infty[.$$

Si

$$\max\left(\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}, \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}\right) < \frac{1}{M_1(\overline{m}-\overline{m})},$$

où

$$(4.3) \qquad M_1 = 2\overline{m} \leq m \leq \overline{m} \leq m' \leq m - \overline{m} s_{\frac{u}{m}} p \frac{m(y(m)}{2g} \beta(m-m', m'),$$

alors il existe une solution σ et une seule de l'équation (3.6) satisfaisant aux conditions

$$(4.4) \ \ \sigma = \overline{\sigma} \ \ sur \ \Gamma_b^1, \ \sigma = \overline{\sigma} \ \ sur \ \Gamma_a^1,$$

solution appartenant à la classe

$$(4.5) \qquad \sigma \in C([0,1]; L^1(\Omega_z)) \cap L^\infty(\Omega),$$

où

$$(4.6) \qquad \Omega_z = \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | \tilde{t} > \tfrac{1-z}{u(m)}\}.$$

Démonstration. On rappelle que l'on a démontré dans [8] une proposition analogue (proposition 5.1 de [19]) dans le cas où le domaine est

$$\Omega_\infty = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times]0,1[,$$

avec la condition d 'entrée sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \{1\}$; même si dans [8] on considérait la position horizontale $x \in \mathbb{R}$ au lieu du temps t, du point de vue mathématique il s'agit de la même équation. Donc, pour démontrer la proposition, il nous suffit de transformer le problème (3.6), (4.4) en un problème dans Ω_∞ avec une condition d'entrée sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \{1\}$ de manière que la restriction de la solution de ce dernier problème à Ω nous donne la solution du problème (3.6), (4.4).

5. Existence et unicité de la solution globale dans le temps

Pour démontrer un théorème d Existence et d'unicité de la solution globale dans le cas général, on va établir la propriété de cône de dépendance" pour l'équation (3.6). Pour ce faire, on considère un ensemble mesurable ω de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ avec $0 < mes(\omega) < \infty$. On définit

$$(5.1) \qquad D[\omega] = \cup_{(m,\tilde{t})\in\omega} D_{(m,\tilde{t})},$$

où

$$(5.2) \qquad D_{(m,\tilde{t})} = \cup_{0\le z\le 1}\left(\cup_{\tau-(m,\tilde{t},z)\le\tau\le\tau_+(m,\tilde{t})} \gamma_{\tau,z}\right) =$$

$$= \{(m',\tilde{t},z') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,1] | \tilde{t} = \tau + \tfrac{1-z'}{u(m')},\ \tau_-(m,\tilde{t},z') \le \tau \le \tau_+(m,\tilde{t})\},$$

avec

$$(5.3) \quad \begin{cases} \tau_+(m,\tilde{t}) = \tau(m,\tilde{t},0) = \tilde{t} - \frac{1}{u(m)}, \\ \tau_-(m,\tilde{t},z) = \max(0, \tau_+(m,\tilde{t}) + \overline{\overline{u}}z) = \max(0, \tilde{t} - \frac{1}{u(m)} + \overline{\overline{u}}z) \end{cases}$$

(pour $\overline{u}$, voir (2.7)). On définit également $D_\omega(z)$ par

$$(5.4) \qquad D_\omega(z) = \cup_{(m,\tilde{t})\in\omega}\left(\cup_{\tau-(m,\tilde{t},z)\le\tau\le\tau+(m,\tilde{t})} \gamma_{\tau,z}\right) = \{(m',\tilde{t},z') \in D[\omega] | z' = z\};$$

on remarque que $D_\omega(z_1)$ est l'intersection de $\cup_{(m,\bar{t})\in\omega} D_{(m,\bar{t})}$ et du plan $z = z_1$. D'après la définition de l'ensemble $D_{(m,\bar{t})}$ (voir aussi la définition (3.5) de $(m, \tilde{t},\ z)$), on remarque que

$$(m',\tilde{t},z') \in D_{(m,\tilde{t})} \Rightarrow \gamma_{\tau(m',\tilde{t},z'),z'} \subset D_{(m,\tilde{t})},$$

$$\tau(m_1,\tilde{t},0) = \tau(m_2,\tilde{t},0) \Rightarrow D_{(m_1,\bar{t})} = D_{(m_2,\bar{t})};$$

cette dernière relation signifie que, si $(m_1,\tilde{t})$ et $(m_2,\tilde{t})$ se trouvent sur une courbe $\gamma_{\tau,0}$, alors ils définissent le même ensemble.

La propriété de cône de dépendance" est donnée par le lemme suivant.

Lemme 5.1. *Soient $\overline{\sigma}$ et $\overline{\sigma}$ deux fonctions définies sur Γ_a^1, $\overline{\sigma}$ et $\overline{\sigma}$ deux fonctions définies sur Γ_b^1. On suppose que $\overline{\sigma}$, $\overline{\sigma}$, $\overline{\sigma}$, $\overline{\sigma}$ satisfont aux conditions de la proposition 4.1. Soit $\sigma^{[1]}$ (resp. $\sigma^{[2]}$) la solution de l'équation* (3.6) avec la condition (4.4) et la condition

$$\sigma = \overline{\sigma} \ \ sur \ \ \Gamma_b^1 \cap D[\omega], \ \ \sigma = \overline{\sigma} \ \ sur \ \ \Gamma_a^1 \cap D[\omega], \tag{5.5}$$

alors on a

$$\sigma^{[1]} = \sigma^{[2]} \ \ p.p. \, dans \ \ D[\omega].$$

Démonstration. En transformant l'équation (3.6) en forme intégrale, on a

$$\sigma^{[i]}(m, \tilde{t}, z) = \sigma^{[i]}(m, \tilde{t}, \zeta_1(m, \tilde{t})) +$$

$$-\frac{m}{2u(m)} \int_z^{\zeta_1} \int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z),z}}{}_{,,} \ \beta(m - m', m')\sigma^{[i]}(m', \tilde{t}, z')\sigma^{[i]}(m - m', \tilde{t}, z')\mu_\gamma(dm')dz' +$$

$$+\frac{m}{u(m)} \int_z^{\zeta_1} \int_{\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z),z}}{}_{,,} \ \beta(m, m')\sigma^{[i]}(m', \tilde{t}, z')\sigma^{[i]}(m, \tilde{t}, z')\mu_\gamma(dm')dz', \ \ i = 1,2,$$

tandis que les conditions $(3.8) - (3.9)$ nous donnent

$$\sigma^{[i]}(m, \tilde{t}, \zeta_1(m, \tilde{t})) = \begin{cases} \overline{\sigma} & sur \ \Gamma_a^1, \\ \overline{\sigma} & sur \ \Gamma_b^1, \end{cases}$$

$\zeta_1(m, \tilde{t})$ étant le nombre défini dans (4.7). En faisant la différence de cette équation pour $i = 1$ et $i = 2$, on a

$$|\sigma^{[1]}(m, \tilde{t}, z) - \sigma^{[2]}(m, \tilde{t}, z)| \leq |\sigma^{[1]}(m, \tilde{t}, \zeta_1(m, \tilde{t})) - \sigma^{[2]}(m, \tilde{t}, \zeta_1(m, \tilde{t}))| +$$

$$+C_\beta [\int_z^{\zeta_1} \int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'}} (|\sigma^{[1]}(m - m', \tilde{t}, z') - \sigma^{[2]}(m - m', \tilde{t}, z')|\sigma^{[2]}(m', \tilde{t}, z') +$$

$$+|\sigma^{[1]}(m', \tilde{t}, z') - \sigma^{[2]}(m', \tilde{t}, z')|\sigma^{[1]}(m - m', \tilde{t}, z'))\mu_\gamma(dm')dz' +$$

$$+\int_z^{\zeta_1} \int_{\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'}} (|\sigma^{[1]}(m, \tilde{t}, z') - \sigma^{[2]}(m, \tilde{t}, z')|\sigma^{[2]}(m', \tilde{t}, z') +$$

$$+|\sigma^{[1]}(m', \tilde{t}, z') - \sigma^{[2]}(m', \tilde{t}, z)|\sigma^{[1]}(m, \tilde{t}, z'))\mu_\gamma(dm')dz'],$$

où

$$C_\beta = \max [\sup \frac{m}{2u(m)} \beta(m - m', m'), \sup \frac{m}{u(m)} \beta(m, m')].$$

On en déduit que

$$|\sigma^{[1]}(m, \tilde{t}, z) - \sigma^{[2]}(m, \tilde{t}, z)| \leq |\sigma^{[1]}(m, \tilde{t}, \zeta_1(m, \tilde{t})) - \sigma^{[2]}(m, \tilde{t}, \zeta_1(m, \tilde{t}))| + \tag{5.6}$$

$$+C_\beta[\int_z^1 (\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})} \|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})} +$$

$$+\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})} \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}) dz' +$$

$$+\int_z^1 (\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})} \|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})} +$$

$$+(\overline{m} - \overline{m})\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})} \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z'),z'})}) dz'].$$

Considérons maintenant un point générique $(m, \tilde{t}, z)$ de $D[\omega]$. En vertu de $(5.2) - (5.3)$ il existe $(m_0, \tilde{t}) \in \omega \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que $\max(0, \tilde{t} - \frac{1}{u(m_0)} + \frac{z}{\overline{u}}) = \tau_-(m_0, \tilde{t}, z) \leq \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)} \leq \tau_+(m_0, \tilde{t}) = \tilde{t} - \frac{1}{u(m_0)}$.

Cette inégalité, jointe à l'inégalité $u(m) \leq \overline{u} < 0$, implique que, pour $0 \leq z \leq z' \leq 1$, on a

$$\tilde{t} - \frac{1}{u(m_0)} + \frac{Z'}{\overline{u}} \leq \tilde{t} - \frac{1-z'}{u(m)} \leq \tilde{t} - \frac{1}{u(m_0)},$$

ou, en vertu de (3.5), (5.3), on a

$$\tau_-(m_0, \tilde{t}, z') \leq \tau(m, \tilde{t}, z') \leq \tau_+(m_0, \tilde{t}),$$

ce qui, d'après la définition (5.4) de l'ensemble $D_\omega(z)$, démontre que $\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z),z'} \subset D_\omega(z')$ pour $0 \leq z \leq z' \leq \zeta_1(m, \tilde{t}) \leq 1$.

On rappelle que l'on a en outre, pour $i = 1,2$,

$$\|\sigma^{[i]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z),z},\mu_\gamma)} \leq (\overline{m} - \overline{m})\|\sigma^{[i]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\tilde{t},z),z})} \leq$$

$$\leq (\overline{m} - \overline{m})\|\sigma^{[i]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))},$$

pour presque tout $(m, \tilde{t}) \in \Omega_z$ (voir (4.6)). Cela étant, de l'équation (5.6) on déduit que

$$\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z) - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))} \leq$$

$$\leq (\|\overline{\sigma} - \overline{\sigma}\|_{L^\infty(\Gamma_b \cap D[\omega])} + \|\overline{\sigma} - \overline{\sigma}\|_{L^\infty(\Gamma_a \cap D[\omega])}) +$$

$$+C \int_z^1 \quad (\|\sigma^{[1]} \ (.,.,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))} + \|\sigma^{[2]} \ (.,.,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}) \times$$

$$\times \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))} dz',$$

où C est une constante indépendante de z. A l'aide du lemme de Gronwall, on en déduit que

$$(5.7) \qquad \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z) - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))} \leq$$

$$\leq (\|\overline{\sigma} - \overline{\sigma}\|_{L^\infty(\Gamma_b \cap D[\omega])} + \|\overline{\sigma} - \overline{\sigma}\|_{L^\infty(\Gamma_a \cap D[\omega])}) \times$$

$$\times\ \exp\left(C\int_z^1(\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}+\|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))})dz'\right).$$

Or, en vertu de l'hypothèse (5.5) on a

$$\|\overline{\sigma}-\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\Gamma_b\cap D[\omega])}=\|\overline{\sigma}-\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\Gamma_a\cap D[\omega])}=0,$$

ce qui nous permet de déduire de (5.7) que

$$\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z)-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))}\leq 0,$$

ou, compte tenu de la relation $D[\omega]=\bigcup_{0\leq z\leq 1}D_\omega(z)$, $\sigma^{[1]}(m,\tilde{t},z)=\sigma^{[2]}(m,\tilde{t},z)$ p.p. dans $D[\omega]$.

Le lemme est démontré.

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème principal.

Théorème 5.1. *Si* $\overline{\sigma}\in L^\infty(\Gamma_a^1)$ *et* $\overline{\sigma}\in L^\infty(\Gamma_b^1)$ *satisfont aux conditions*

$$(5.8)\qquad \overline{\sigma}(m,\tilde{t},z)\geq 0\ \ p.p.\ sur\ \ \Gamma_a^1,\ \ \overline{\sigma}(m,\tilde{t})\geq 0\ \ p.p.\ sur\ \ \Gamma_b^1,$$

$$(5.8)\qquad \overline{\sigma}(m,\tilde{t},z)=0,\ \ \overline{\sigma}(m,\tilde{t})=0\ \ pour\ \in[0,\overline{m}]\cup[\overline{m},\ \infty[,$$

$$(5.10)\qquad \max\left(\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\Gamma_a)};\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}\right)<\frac{1}{M_1(\overline{m}-\overline{m})}\ ,$$

M_1 *étant la constante indiquée dans la proposition* 4.1, *alors* l'*équation* (3.6) *avec la condition* (4.2) *admet une solution* σ *et une seule appartenant à la classe*

$$\sigma\in L^\infty(\Omega)$$

et σ *vérifie les relations*

$$\sigma(m,\tilde{t},z)\geq 0\ \ p.p.\ dans\ \ \Omega,$$

$$\sigma(m,\tilde{t},z)=0,\ pour\ \in[0,\overline{m}]\cup[\overline{m},\ \infty[.$$

Démonstration. Pour démontrer l'existence de la solution globale dans le temps du problème (3.6), (4.2), on considère une famille d'ensembles mesurables et bornés ω_i, $i\in\mathbb{N}$, définis par

$$(5.11)\qquad \omega_i=\{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}|\overline{m}\leq m\leq\overline{m},\frac{1}{u(m)}\leq\tilde{t}\leq i\}=$$

$$=\Omega_0\cap\{(m,\tilde{t})\in[\overline{m},\overline{m}]\times\mathbb{R}|\tilde{t}\leq i\},$$

où Ω_0 est l'ensemble défini dans (4.6) avec $z=0$. La définition de $D[\omega]$ (voir (5.1), (5.2)) nous permet de définir un nombre N tel que

$$(5.12)\qquad D_{\omega_i}(1)\subset\{(m,\tilde{t})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}|\tilde{t}\leq i+N\}\ \text{pour tout}\ i\in\mathbb{N}.$$

On considère une fonction $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\psi(s) = \begin{cases} 1 & si\ s \leq 0, \\ 0 & si\ s \geq 1, \end{cases}$$

avec $0 \leq \psi(s) \leq 1 \forall s \in [0,1]$ et on pose

$$(5.13) \qquad \psi_i(\tilde{t}) = \psi(\tilde{t} - (i+N));$$

on a évidement

$$(5.14) \qquad D_{\omega_i}(1) \subset \{(m,\tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | \psi_i(\tilde{t}) = 1\} \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

Cela étant, on considère la famille d'équations

$$(5.15) \qquad \partial_z \sigma^{[i]}(m,\tilde{t},z) = F(\sigma^{[i]}(z))(m,\tilde{t}),\ i \in \mathbb{N}$$

(avec $F(\cdot)$ définie dans (3.6)), complétées par les conditions

$$(5.16) \qquad \sigma^{[i]} = \psi_i \overline{\sigma} \text{ sur } \Gamma_b^1,\ \sigma^{[i]} = \overline{\sigma} \text{ sur } \Gamma_a^1.$$

D'après la proposition 4.1 (avec $\overline{\sigma} = \psi_i \overline{\sigma}$ et $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}$) le problème $(5.15) - (5.16)$ admet une unique solution $\sigma = \sigma^{[i]} \in C([0,1]; L^1(\Omega_z)) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que

$$\sigma^{[i]} \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega,\ \sigma^{[i]}(m,\tilde{t},z) = 0 \text{ pour } m \in [0,\overline{m}] \cup [\overline{m}, \infty[.$$

D'autre part, d'après la définition des ensembles ω_i (voir (5.11)), on a

$$D[\omega_i] \subset D[\omega_{i'}] \text{ pour } i \leq i'.$$

Par conséquent, en vertu du lemme 5.1 et de (5.16) (voir aussi (5.13)), on a

$$\sigma^{[i]} = \sigma^{[i']} \text{ p.p. dans } D[\omega_i] \text{ pour } i \leq i'.$$

Donc, en définissant σ par

$$\sigma = \begin{cases} \sigma^{[0]} & dans\ \Omega \cap D[\omega_0], \\ \sigma^{[i]} & dans\ D[\omega_i] \backslash D[\omega_{i-1}], i = 1,2,\ldots. \end{cases}$$

on a

$$\sigma = \sigma^{[i]} \text{ p.p. dans } \cap D[\omega_i]\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Par suite, en vertu de (5.15) on a

$$\partial_z \sigma(m,\tilde{t},z) = F(\sigma(z))(m,\tilde{t}), \text{ dans } \cap D[\omega_i]\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

En outre, en vertu de (5.14) et (5.16), on a

$$\sigma = \sigma^{[i]} = \overline{\sigma} \text{ sur } \Gamma_b^1 \cap D[\omega_i],\ \sigma = \sigma^{[i]} = \overline{\sigma} \text{ sur } \Gamma_a^1 \cap D[\omega_i].$$

Donc, en rappelant les relations $\Omega \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D\,[\omega_i]$ et $\Gamma_b^1 \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_{\omega_i}(1)$ qui résultent de la définition de ω_i, $D[\omega_i]$, $D_{\omega_i}(1)$, on peut conclure qu'il existe une solution du problème (3.6), (4.2).

Pour démontrer l'unicité de la solution, considérons deux éventuelles solutions σ_1, σ_2 du problème (3.6),(4.2). Si $\sigma_1 \neq \sigma_2$ sur un ensemble de mesure strictement positive, alors on peut choisir un ensemble mesurable ω tel que $0 < mes(\omega) < \infty$ et que

$$mes(\{(m,\tilde{t},z) \in D[\omega] | \sigma_1 \neq \sigma_2\}) > 0.$$

Or comme σ_1 et σ_2 sont des solutions du problème (3.6),(4.2), $\sigma_1 = \sigma_2$ sur $\Gamma_a^1 \cup \Gamma_b^1$, en particulier $\sigma_1 = \sigma_2$ sur $(\Gamma_a^1 \cup \Gamma_b^1) \cap D[\omega]$; cette condition entraine, d'après le lemme 5.1, que $\sigma_1 = \sigma_2$ dans $D[\omega]$, ce qui prouve qu'il n'est pas possible d'avoir deux solutions σ_1 et σ_2 qui se diffèrent sur un ensemble de mesure strictement positive. L'unicité de la solution est démontrée.

En retournant aux coordonnées (m,t,z), on peut exprimer le résultat dans la forme suivante.

Théorème 5.2. *Si* $\overline{\sigma} \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times [0,1])$ *et* $\overline{\sigma} \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ *satisfont aux conditions*

$$\overline{\sigma}(m,t,z) \geq 0 \;\; p.p. \;\; sur \mathbb{R}_+ \times [0,1], \; \overline{\sigma}(m,t) \geq 0 \;\; p.p. \;\; sur \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

$$\overline{\sigma}(m,t,z) = 0, \; \overline{\sigma}(m,t) = 0 \;\; pour \; \in [0,\overline{m}] \cup [\overline{m}, \; \infty[,$$

$$\max\left(\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times [0,1]);} \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)}\right) < \frac{1}{M_1(\overline{m} - \overline{m})},$$

M_1 étant la constante indiquée dans la proposition 4.1*, alors* l'*équation* (2.1) *avec les conditions* (2.8) *et* (2.9) *admet une solution σ et une seule appartenant à la classe*

$$\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times]0,1[)$$

et σ vérifie les relations

$$\sigma(m,t,z) \geq 0 p.p. \; dans \;\; \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times] \;\; 0,1[,$$

$$\sigma(m,t,z) = 0, pour \; \in [0,\overline{m}] \cup [\overline{m}, \; \infty[.$$

Démonstration. Rappelons qu'avec le changement de variables $(m,t,z) \mapsto (m,\tilde{t},z)$ introduit par (3.1), on a transformé l'équation (2.1) et les conditions $(2.8) - (2.9)$ dans (3.6) et (4.2). Donc, si $\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},z)$ est la solution du problème (3.6), (4.2) dont l'existence et l'unicité ont été démontrées dans le théorème 5.1, alors, en faisant retourner les fonctions dans les coordonnées (m,t,z), on voit que la fonction

$$\sigma(m,t,z) = \tilde{\sigma}(m, t + \frac{1-z}{u(m)}, z)$$

Satisfait à l'équation (2.1) et aux conditions $(2.8) - (2.9)$. L'unicité de la solution σ découle de celle de $\tilde{\sigma}$ démontrée dans le théorème 5.1.

6. Convergence de la solution globale vers la solution stationnaire

Le résultat obtenu dans le paragraphe 5 nous donne également la convergence de la solution globale vers la solution stationnaire. Rappelons d'abord le résultat sur la solution stationnaire. On considère l'équation

$$(6.1)\qquad \partial_z\sigma(m,z) = -\frac{m(y(m)}{2g}\int_0^m \beta\,(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm' +$$

$$+\frac{m(y(m)}{g}\int_0^\infty \beta\,(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'$$

(pour $(y(m)$ voir (2.4)) *avec* la condition aux limites (condition d'entrée)

$$(6.2)\qquad \sigma(m,1) = \overline{\sigma}(m).$$

Proposition 6.1. *Soit* $\overline{\sigma}(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *avec* $\overline{\sigma} \geq 0$, $\overline{\sigma}(m) = 0$ *pour* $m \in [0,\overline{m}] \cup [\ \overline{m},\ \infty[$. *Alors le problème* $(6.1)-(6.2)$ *admet une unique solution* $\in C([0{,}1];L^1(\mathbb{R}_+))$ (*c'est-à-dire, l'application* $z\sigma(\cdot,z)$ *est une fonction continue de* $[0{,}1]$ *à valeurs dans* $L^1(\mathbb{R}_+)$) *telle que*

$$\sigma \geq 0,\ \sigma(m,z) = 0\ pour \in [0,\overline{m}] \cup [\overline{m},\ \infty[.$$

Démonstration. Pour la Démonstration, voir [19], la proposition 3.1.

S'il existe un $t_1 \geq 0$ tel que

$$\overline{\sigma}(m,t) = \overline{\sigma}(m)\ \ \forall t \geq t_1,\ m \in \mathbb{R}_+,$$

avec une fonction $\overline{\sigma}(\cdot)$ qui ne depend pas de t, alors la convergence de la solution σ obtenue dans le théorème 5.2 vers la solution stationnaire avec la condition d'entrée $\overline{\sigma}(m) = \overline{\sigma}(m)$ résulte immédiatement du théorème 5.1 et du lemme 5.1.

Pour examiner la convergence pour le cas des conditions plus générales pour $\overline{\sigma}$, admettons que $\overline{\sigma}(\cdot,t)$ tend vers $\overline{\sigma}(\cdot)$ (dans le sens qu'on va préciser) et considérons la solution stationnaire $\sigma^\infty = \sigma^\infty(m,z)$, qui s'obtient par la proposition 6.1 avec $\overline{\sigma}(m) = \overline{\sigma}(m)$. Introduisons en outre les notations

$$\overline{\sigma}(m,s) = \overline{\sigma}(m,t+s),\ \sigma^t(m,s,z) = \sigma(m,t+s,z)\ \text{pour}\ 0 < s < 1.$$

On a alors le résultat suivant.

Proposition 6.2. *Soient* $\overline{\sigma}$ *et* $\overline{\sigma}$ *comme dans le théorème 5.2. On suppose en outre que*

$$(6.3)\qquad \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}\ pour\ t \to \infty\ dans\ L^\infty(\mathbb{R}_+ \times]0{,}1\ [\ ).$$

Alors on a

$$(6.4)\qquad \sigma^t \to \sigma^\infty\ pour\ t \to \infty\ dans\ L^\infty(\mathbb{R}_+ \times]0{,}1[\times]0{,}1\ [\ ).$$

Dans (6.3) *et* (6.4), $\overline{\sigma}$ *et* σ^∞ *sont à considérer comme fonctions appartenant à* $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times]0{,}1\ [\ )$ *et* $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times]0{,}1[\times]0{,}1\ [)$ *et indépendantes de* $s \in]\ 0{,}1\ [$.

Démonstration. Rappelons d'abord la définition (3.1) de $\tilde{t}$, qui nous donne l'expression de t en fonction de $\tilde{t}$, c'est-à-dire

$$(6.5) \qquad t = t(m, \tilde{t}, z) = \tilde{t} - \frac{1-z}{u(m)}.$$

Cela étant, de la définition de $D[\omega]$ (voir (5.1)) il résulte immédiatement qu'il existe deux constantes N_1 et N_2 telles que, si on pose

$$\omega^{[t]} = \{(m, \tilde{t}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} | m \in]\overline{m}, \ \overline{m}\ [, \ \tilde{t} \in [t - N_1, t + N_2]\},$$

on ai

$$(6.6) \qquad \mathbb{R}_+ \times [t, t+1] \times [0,1] \subset \{(m, t', z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [0,1] | t' = t'(m, \tilde{t}, z), (m, \tilde{t}, z) \in D[\omega^{[t]}]\}.$$

Comme σ^∞ peut être considérée comme la solution du problème (2.1), (2.8) et (2.9) avec $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}$ et $\overline{\sigma} = \sigma^\infty$, en tenant compte que σ^∞ et $\overline{\sigma}$ sont indépendantes de t, en faisant la comparaison de l'équation (2.1) pour σ et celle pour σ^∞, et en les considérant dans les coordonnées $(m, \tilde{t}, z)$ (mais, pour éviter la notation lourde due au changement de variables défini dans (3.1), nous utilisons la même notation pour σ), de la même manière que pour l'inégalité (5.7), on a

$$(6.7) \qquad \|\sigma(\cdot,\cdot,z) - \sigma^\infty(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_{\omega^{[t]}}(z))} \leq \|\overline{\sigma} - \overline{\sigma}\|_{L^\infty(D_{\omega^{[t]}}(1))} \times$$

$$\times \ \exp\left(C \int_z^1 (\|\sigma(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_{\omega^{[t]}}(z'))} + \|\sigma^\infty(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_{\omega^{[t]}}(z'))}) dz'\right).$$

Or, de l'hypothèse (6.3) (voir aussi (6.5), (5.4)) il résulte que

$$\|\overline{\sigma} - \overline{\sigma}\|_{L^\infty(D_{\omega^{[t]}}(1))} \to 0 \ \text{ pour } \ t \to \infty.$$

Donc de (6.7) on déduit que

$$\|\sigma(\cdot,\cdot,z) - \sigma^\infty(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_{\omega^{[t]}}(z))} \to 0 \ \text{ pour } \ t \to \infty, \ 0 \leq z \leq 1,$$

c'est-à-dire, en le traduisant encore dans les coordonnées (m, t, z) (voir (6.5) et (6.6)), on a

$$\sigma^t \to \sigma^\infty \ \text{ pour } \ t \to \infty \ \text{ dans } \ L^\infty\ (\ \mathbb{R}_+ \times]0,1[\times]0,1\ [\ ).$$

La proposition est démontrée.

3.3. Solution stationnaire de l'équation de coagulation des gouttelettes avec un vent vertical

1. Introduction

Le problème de l'équation de coagulation des gouttelettes qui tombent dans l'air a été étudié dans les travaux [19] et [2], qui ont établi, sous des conditions convenables, l'existence et l'unicité de la solution stationnaire et de la solution globale en temps et la convergence de cette dernière vers la solution stationnaire. En particulier dans [19] on a examiné le processus de coagulation et de chute des gouttelettes à la présence d'un vent horizontal constant. Il est vrai que dans la Nature la composante verticale de la vitesse de l'air est, généralement, assez petite par rapport aux composantes horizontales.

Mais il y a aussi des cas où le mouvement vertical ascendant de l'air constitue l'élément fondamental du phénomène, comme dans le cas des orages ou dans la partie centrale d'un cyclone tropical. En effet, dans ces cas, l'écoulement ascendant de l'air cause une forte condensation de vapeur, créant des gouttelettes très nombreuses, qui se coagulent en formant des gouttelettes plus grandes et tombent comme pluie intense (voir par exemple...).

Pour contribuer à l'analyse et l'éclaircissement de ces phénomènes, dans le présent travail nous allons étudier l'équation pour la distribution des gouttelettes qui se déplacent par un vent vertical et par la force gravitationnelle et subissent le processus de coagulation et celui d'accroissement de poids dû à la condensation de la vapeur sur leur surface. Plus précisément, nous allons considérer une équation intégro-différentielle pour une fonction inconnue $\sigma = \sigma(m, z)$ représentant la densité (par rapport au volume de l'air) de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m à la hauteur $(0 \leq z \leq 1)$. Comme notre intérêt principal concerne le comportement de la densité σ en présence d)un vent vertical ascendant (ou de la composante verticale positive d)un vent), nous concentrons notre attention sur la variation de σ par rapport à hauteur z, en négligeant son éventuelle dépendance de la position horizontale. L'équation dans la forme précise va être formulée dans le paragraphe suivant (voir (2.1)). Nous allons démontrer, dans la suite, l'existence d'une solution stationnaire de cette équation avec les « conditions d'entrée » pour $\sigma(m, z)$.

Du point de vue technique, nous construisons d'abord la solution $\sigma(m, z)$ dans la partie où la vitesse des gouttelettes $u(m, z)$ est positive, en supposant que la densité $\sigma(m, z)$ est donnée dans la partie où $(m, z) < 0$, et la solution dans la partie où $u(m, z) < 0$, en supposant que la densité est donnée dans la partie où $u(m, z) > 0$. Ensuite nous allons appliquer le théorème de point fixe de Schauder pour trouver une solution dans le domaine entier. Pour faire marcher ces raisonnements, comme il est naturel, nous avons besoin d)estimations adéquates. Or, ces estimations ne s)obtiennent pas facilement, en particulier, dans le voisinage des points (m, z) où la vitesse où $u(m, z)$ des gouttelettes de masse m s'annule, et, pour les obtenir, nous avons besoin d'une élaboration considérable des estimations, ce qui constitue le point technique principal de notre travail.

Il est également utile de rappeler que l'équation de coagulation, souvent appelée équation de Smoluchowski, a été proposée par Smoluchowski [19] et Müller [14] et étudiée par plusieurs scientifiques (voir [18], [33], [20], [7], [21], [5], [8], [6], [24], etc...), en y ajoutant éventuellement les termes du processus de fragmentation, mais sans prendre en considération le déplacement des gouttelettes ni 1)efffet de la condensation sur eux. L'équation de coagulation des gouttelettes en chute a été proposée dans le cadre de la modélisation de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau (voir par exemple [10], [1], [29], [9]).

2. Position du problème

Nous allons considérer la densité $\sigma = \sigma(m, z)$ de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m à la hauteur $z \in [0,1]$. En désignant par $u = u(m, z)$ la vitesse (verticale) des gouttelettes de masse m à la position z, par $h_{gl} = h_{gl}(m, z)$ la quantité de condensation sur les gouttelettes de masse m par unité de temps et par unité de masse de gouttelettes et par $\beta = \beta(m_1, m_2)$ le taut de coagulation entre les gouttelettes de masse m_1 et celles de masse m_2, nous considérons l'équation

$$(2.1) \qquad \partial_z(\sigma(m,z)u(m,z)) + \partial_m(mh_{gl}(m,z)\sigma(m,z)) = h_{gl}(m, z)\sigma(m,z) +$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta\,(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)dm' +$$

$$-m\int_0^\infty \beta\,(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'$$

dans le domaine

$$(2.2)\qquad \Omega = \{(m,z)\in\mathbb{R}^2 | m > \overline{m}, 0 < z < 1\},\ \ \overline{m} > 0;$$

dans le présent travail nous supposons que les fonctions $u(m,z)$ et $h_{gl}(m,z)$ sont données. l'équation (2.1) va être envisagée dans Ω avec les conditions d'entrée

$$(2.3)\qquad \sigma(m,z) = \overline{\sigma}(m,z)\ \text{ pour }\ (m,z)\in S_0\cup S_1\cup S_a,$$

où

$$(2.4)\qquad S_0 = \{(m,z)\in\overline{\Omega} | m \geq \overline{m}, z = 0, u(m,0)\geq 0\},$$

$$(2.5)\qquad S_1 = \{(m,z)\in\overline{\Omega} | m \geq \overline{m}, z = 1, u(m,0) < 0\},$$

$$(2.6)\qquad S_a = \{(m,z)\in\overline{\Omega} | m = \overline{m}, 0\leq z\leq 1\}.$$

On suppose que $\overline{\sigma}(m,z)$ est continue sur $S_0\cup S_1\cup S_a$ et que

$$(2.7)\qquad \overline{\sigma}(m,z)\geq 0\ \ \forall(m,z)\in S_0\cup S_1\cup S_a,$$

$$(2.8)\qquad \overline{\sigma}(m,z) = 0\ \text{ si } \geq \overline{\overline{m}}\ \ (\overline{\overline{m}} > \overline{m}).$$

On remarque que $S_0\cup S_1\cup S_a$ est la partie de la frontière de Ω où le vecteur $(mh_{gl},u)^T$ est orienté vers l'intérieur de Ω; on précise que, d'après la condition (??) (voir aussi (2.15)) formulée dans la suite, on aura $\overline{m}h_{gl}(\overline{m},z) > 0$ pour tout $z\in[0,1]$, ce qui nous garantit que le vecteur $(mh_{gl},u)^T$ est orienté vers l'intérieur de Ω même sur S_a.

Il serait utile de rappeler que l'équation (2.1) est le cas stationnaire de l'équation décrivant de la variation de la densité de l'eau liquide $\sigma = \sigma(m,z,t)$ dans le cadre de la modélisation de l'atmosphère avec la condensation de la vapeur (voir [1]; voir aussi [10], [29], [9]). Le choix d'une constante $\overline{m}$ strictement positive et convenablement petite et du domaine Ω donné dans (2.2) est, nous croyons, conforme à la nature physique du problème; en effet, la courbure élevée des gouttelettes très petites ne leur permet pas de subsister dans l'atmosphère réelle et les gouttelettes se forment exclusivement sur des aérosols ayant une masse supérieure à une valeur critique (voir par exemple [11], [26]). En outre, même si la condition (2.8) est restrictive, nous la posons, car une généralisation envisageable dans la méthodologie du présent travail ne nous semble pas particulièrement intéressante (pour le choix de $\overline{m}$, voir le commentaire de la fin de ce paragraphe).

Il est bon de rappeler, en outre, que dans la littérature concernant l'équation de Smoluchowski on utilise souvent le nombre, au sens purement statistique, des gouttelettes de masse m dans l'unité de volume

$$\tilde{n}(m,z,t) = \frac{\sigma(m,z,t)}{m}$$

au lieu de la densité σ. Mais nous préférons utiliser la densité σ pour la commodité pour la modélisation générale des phénomènes météorologiques.

Maintenant on va préciser les hypothèses sur les fonctions $\mathrm{u(m, z)}$, $\mathrm{h_{gl}(m, z)}$ et $\beta(\mathrm{m_1, m_2})$. D'abord nous écrivons la formulation formelle des conditions et puis nous allons donner des motivations de ces conditions introduites.

On suppose que $u(m, z)$ a l'expression

$$(2.9) \quad u(m, z) = v(z) - \frac{g}{(y(m)}$$

et que g est une constante strictement positive et

$$(2.10) \quad v(\cdot) \in C^1([0,1]), \ \ \inf v(z) > 0,$$

$$(2.11) \quad (y(\cdot) \in C^1([\overline{m}, \ \infty[), \ \frac{d}{dm}(y(m) < 0 \ \ \forall m \geq \overline{m},$$

$$(2.12) \quad 0 < m \geq in_{\frac{f}{m}} a(y \ \ (m) < m \geq^{\frac{p}{m}} su\alpha(m)a < \infty,$$

$$(2.13) \quad \inf (v(z) - \frac{g}{(y(\overline{m})}) > 0,$$

$$(2.14) \quad \exists m_1 > \overline{m} \ \text{ tel que } \ \sup (v(z) - \frac{g}{(y(m_1)}) < 0.$$

Pour la fonction $h_{gl}(m, z)$ on suppose que

$$(2.15) \quad h_{gl}(\cdot, \ ) \in C^1(\overline{\Omega}),$$

$$(2.16) \quad 0 < \ \inf m h_{gl}(m, z) \leq \ \sup m h_{gl}(m, z) < \infty.$$

En ce qui concerne $\beta(m_1, m_2)$ nous supposons que

$$(2.17) \quad \beta(\cdot, \ ) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \ \beta(m_1, m_2) \geq 0 \forall (m_1, m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

$$(2.18) \quad \beta(m_1, m_2) = \beta(m_2, m_1)$$

$$(2.19) \quad \beta(m_1, m_2) = 0 \ \text{ pour } \ m_1 + m_2 \geq \overline{m},$$

où $\overline{m}$ est une constante telle que $\overline{m} < \overline{m} < \infty$.

Pour que la position de notre problème corresponde à cette situation, nous supposons que $\mathrm{v(z)} > 0$ et $\mathrm{h_{gl}} > 0$.

3. Division du domaine et caractéristiques

Nous définissons $d^{)}abord$ la division du domaine Ω en trois parties $\Omega_1, \ \Sigma, \ \Omega_2$

$$(3.1) \ \begin{cases} \Omega_1 = \{(m, z) \in \Omega | u(m, z) > 0\}, \\ \Sigma = \{(m, z) \in \Omega | u(m, z) = 0\}, \\ \Omega_2 = \{(m, z) \in \Omega | u(m, z) < 0\}. \end{cases}$$

En vertu des conditions $(2.9) - (2.11)$ la frontière Σ entre Ω_1 et Ω_2 est une courbe de classe C^1 et peut être écrite dans la forme

$$(3.2) \quad \Sigma = \{(m, z) \in \Omega | m = m_\Sigma(z)\}$$

avec une fonction $m_\Sigma(z)$ de classe C^1 déterminée par la relation

$$u(m_\Sigma(z), z) = 0,\ z \in [0,1].$$

La fonction $m_\Sigma(z)$ jouit de la propriété suivante.

Lemme 3.1. *On a*

$$(3.3) \qquad \frac{dm_\Sigma(z)}{dz} = -\frac{(y(m)^2\frac{dv(z)}{dz}}{g\frac{d\alpha(m)}{dm}}.$$

Démonstration. Comme $m_\Sigma(z)$ est définie par la relation

$$u(m_\Sigma(z), z) = v(z) - \frac{g}{(y(m)} = 0,$$

en désignant par $\vec{w} = (\frac{dm_\Sigma(z)}{dz}, 1)^T$ le vecteur tangent à la courbe Σ, de la relation

$$\nabla u \cdot \vec{w} = \frac{g}{(y(m)^2} \frac{d_{(y}(m)}{dm} \frac{dm_\Sigma(z)}{dz} + \frac{dv(z)}{dz} = 0$$

on obtient (3.3).

Maintenant on va définir les caractéristiques pour l'équation (2.1), qui peut être écrite dans la forme

$$(3.4) \qquad u(m,z)\partial_z \sigma(m,z) + mhgl(m,z)\partial_m \sigma(m,z) =$$

$$= -\sigma(m,z)(\partial_z u(m,z) + m\partial_m h_{gl}(m,z)) +$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta\,(m-m', m')\sigma(m', z)\sigma(m-m', z)dm' +$$

$$-m\int_0^\infty \beta\,(m, m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)dm'.$$

De l'expression de l'équation (3.4) il résulte que les caractéristiques sont déterminées par le système d'$\acute{e}quations$

$$(3.5) \qquad \frac{dz(t)}{dt} = u(m(t), z(t)),$$

$$(3.6) \qquad \frac{dm(t)}{dt} = m(t)h_{gl}(m(t), z(t))$$

avec les conditions initiales pour $(\mathrm{m}(\mathrm{t}_0), \mathrm{z}(\mathrm{t}_0))$. Comme le second membre des équations $(3.5) - (3.6)$ est de classe C^1 par rapport à (m, z), pour tout $(\mathrm{m}, \mathrm{z}) \in \overline{\Omega}$ il existe une courbe et une seule qui est définie par les équations $(3.5) - (3.6)$ et qui passe par (m, z). Nous désignons ces courbes par

$$(3.7)\qquad \gamma = \{(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) \in \overline{\Omega} | t \in [t_0, t_1]\}$$

et par Γ^1 l'ensemble de toutes ces caractéristiques γ; dans (3.7) $m_\gamma(t)$ et $z_\gamma(t)$ sont des fonctions qui satisfont au système d'équations $(3.5) - (3.6)$, tandis que t_0 et t_1 sont tels que $z_\gamma(t_0) = 0$ ou 1, ou $m_\gamma(t_0) = \overline{m}$ et $z_\gamma(t_1) = 0$ ou 1, mais, comme on le voit aisément, t_0 peut être choisi arbitrairement.

Lemme 3.2. Chaque $\gamma \in \Gamma^1$, courbe définie par les équations $(3.5) - (3.6)$ et les conditions initiales, peut être représentée par une fonction continue $\overline{z}(m) = \overline{z}(m)$ de $m \in [m_0, m_1]$ à valeurs dans $[0,1]$ (avec certains m_0, $m_1 \in [\overline{m}, \infty[$) et la fonction $\overline{z}(m)$ est strictement croissante dans la partie où $(m, \overline{z}(m)) \in \Omega_1$ et strictement décroissante dans la partie où $(m, \overline{z}(m)) \in \Omega_2$.

Démonstration. Comme $mh_{gl}(m,z) > 0$ pour tout $(m,z) \in \Omega(\text{voir}(2.16))$, l'équation (3.6) implique que sur γ la fonction $m_\gamma(t)$ est strictement croissante, ce qui nous permet de représenter γ par une fonction $\overline{z}(m) = \overline{z}(m)$ pour $m \in [m_0, m_1]$, $m_0 = m(t_0)$, $m_1 = m(t_1)$. Des équations $(3.5) - (3.6)$ on déduit que

$$(3.8)\qquad \frac{d\overline{z}(m)}{dm} = \frac{u(m,z)}{mh_{gl}(m,z)} \text{ pour } (m,z) \in \gamma.$$

La définition des sous-domaine Ω_1 et Ω_2 et la relation (3.8) entraînent que $\frac{d\overline{z}(m)}{dm} > 0$ si $(m, \overline{z}(m)) \in \Omega_1$ et que $\frac{d\overline{z}(m)}{dm} < 0$ si $(m, \overline{z}(m)) \in \Omega_1$, ce qui prouve la deuxième partie de l'énoncé du lemme.

On voit aisément que, quelque soit $\gamma \in \Gamma^1$, Σ et γ possèdent au plus un point commun, que nous notons

$$(m_\Sigma(\gamma), z_\Sigma(\gamma)).$$

Si on définit t_Σ par la relation

$$(m_\gamma(t_\Sigma), z_\gamma(t_\Sigma)) \in \Sigma,$$

on a

$$(m_\Sigma(\gamma), z_\Sigma(\gamma)) = (m_\gamma(t_\Sigma), z_\gamma(t_\Sigma)).$$

On remarque que $m_\Sigma(\gamma)$ et $z_\Sigma(\gamma)$ vérifient les relations

$$m_\Sigma(\gamma) = m_\Sigma(z_\Sigma(\gamma)) = m_\gamma(t_\Sigma),\ z_\Sigma(\gamma) = \max \overline{z}(m).$$

Nous posons

$$(3.9)\qquad \gamma^{(1)} = \gamma \cap \overline{\Omega_1},\ \gamma^{(2)} = \gamma \cap \overline{\Omega_2},$$

$$\Gamma^{1(1)} = \{\gamma^{(1)} = \gamma \cap \overline{\Omega_1} | \gamma \in \Gamma\},$$

$$\Gamma^{1(2)} = \{\gamma^{(1)} = \gamma \cap \overline{\Omega_2} | \gamma \in \Gamma\}$$

Comme $\overline{z}(m)$ est strictement croissante pour $m_0 \le m \le m_\Sigma(\gamma)$ et strictement décroissante dans $m_\Sigma(\gamma) \le m \le m_1$ (voir le lemme 3.2), on peut définir les fonctions $m_\gamma^{(1)}(z)$ et $m_\gamma^{(2)}(z)$ par les relations

$$(3.10)\qquad m = m_\gamma^{(1)}(z) \Leftrightarrow (m,z) \in \gamma^{(1)},\ m = m_\gamma^{(2)}(z) \Leftrightarrow (m,z) \in \gamma^{(2)}.$$

Lemme 3.3. *On suppose que* $\Sigma \cap \gamma \neq \emptyset$. *Alors, quelque soit* $\ > 0$, *il existe un* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tel que*

$$(3.11)\qquad \int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta}^{Z\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'),z')} dz' \leq \varepsilon,\ \int_{z_\Sigma(\gamma)}^{Z\Sigma(\gamma)-\delta} \frac{1}{u(m_\gamma^{(2)}(z'),z')} dz' \leq \varepsilon.$$

Corollaire. *On pose*

$$z_1^{(\gamma)} = z_\Sigma(\gamma)\ \ si\ \ \Sigma \cap \gamma \neq \emptyset,\ z_1^{(\gamma)} = 1\ \ si\ \ \gamma \subset \overline{\Omega_1},$$

$$z_2^{(\gamma)} = z_\Sigma(\gamma)\ \ si\ \ \Sigma \cap \gamma \neq \emptyset,\ z_2^{(\gamma)} = 1\ \ si\ \ \gamma \subset \overline{\Omega_2}.$$

Alors, quelque soit $\varepsilon > 0$, *il existe un* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tel que*

$$\int_{z_1^{(\gamma)}-\delta}^{z_1^{(\gamma)}} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'),z')} dz' \leq \varepsilon,$$

$$\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z_2^{(\gamma)}-\delta} \frac{1}{u(m_\gamma^{(2)}(z'),z')} dz' \leq \varepsilon.$$

4. Transformation de l'équation

Les caractéristiques γ étant définies, nous pouvons écrire l'équation(3.4) comme la Famille d'équations sur $\gamma \in \Gamma^1$

$$(4.1)\qquad \frac{d}{dt}\sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) =$$

$$= -\sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t))(m\partial_m h_{gl}(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) + \partial_z u(m_\gamma(t), z_\gamma(t))) +$$

$$+\frac{m_\gamma(t)}{2}\int_0^{m_\gamma(t)} \beta\,(m_\gamma(t) - m', m')\sigma(m', z_\gamma(t))\sigma(m_\gamma(t) - m', z_\gamma(t))dm' +$$

$$-m_\gamma(t)\int_0^\infty \beta\,(m_\gamma(t), m')\sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t))\sigma(m', z_\gamma(t))dm';$$

ici, pour ne pas alourdir l'$écriture$, nous avons écrit

$$\partial_m h_{gl}(m_\gamma(t), z_\gamma(t)),\ \partial_z u(m_\gamma(t), z_\gamma(t))$$

au lieu de

$$\partial_m h_{gl}(m,z)|_{(m,z)=(m_\gamma(t),z_\gamma(t))},\ \partial_z u(m,z)|_{(m,z)=(m_\gamma(t),z_\gamma(t))}.$$

Si nous introduisons les opérateurs $K[m,z;\sigma,\sigma]$ et $L[m,z;\sigma]$ par

$$(4.2)\qquad K[m,z;\sigma,\sigma] = \int_0^m \beta\,(m-m', m')\sigma(m-m', z)\sigma(m', z)dm',$$

$$(4.3)\qquad L[m,z;\sigma] = \int_0^\infty \beta\,(m, m')\sigma(m', z)dm',$$

nous pouvons écrie l'équation (4.1) sur γ dans la forme

$$(4.4)\qquad \frac{d}{dt}\sigma(m_\gamma(t),z_\gamma(t)) =$$

$$= -\sigma(m_\gamma(t),z_\gamma(t))(m\partial_m h_{gl}(m_\gamma(t),z_\gamma(t)) + \partial_z u(m_\gamma(t),z_\gamma(t))) +$$

$$+m_\gamma(t)(\frac{1}{2}K[m_\gamma(t),z_\gamma(t);\sigma,\sigma] - \sigma(m_\gamma(t),z_\gamma(t))L[m_\gamma(t),z_\gamma(t);\sigma]).$$

Si on considère l'équation (4.4) séparément sur $\gamma^{(1)} = \gamma \cap \overline{\Omega_1}$ et sur $\gamma^{(2)} = \gamma \cap \overline{\Omega_2}$, on

peut même transformer (4.4) dans une forme relative à la variable z. On rappelle que sur $\gamma = \gamma^{(1)} \cup \gamma^{(2)}$ on a

$$(4.5)\qquad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{d\sigma}{dz}u(m_\gamma(t),z_\gamma(t)).$$

Considérons d'abord l'équation sur $\gamma^{(1)}$ et utilisons la fonction $m_\gamma^{(1)}(z)$ (voir (3.10)). Si on introduit les notations $\sigma(\gamma;z)$, $h_{gl}(\gamma;z)$, $u(\gamma;z)$ par

$$(4.6)\qquad \sigma(\gamma;z) = \sigma(m_\gamma^{(1)}(z);z),\ \ h_{gl}(\gamma;z) = h_{gl}(m_\gamma^{(1)}(z);z),\ \ u(\gamma;z) = u(m_\gamma^{(1)}(z);z),$$

compte tenu de la relation (4.5), nous pouvons écrire l'équation (4.1) dans la forme

$$(4.7)\qquad \frac{d\sigma(\gamma;z)}{dz} = -\frac{\sigma(\gamma;z)}{u(\gamma;z)}(m_\gamma^{(1)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z)) + \partial_z u(\gamma;z)) +$$

$$+\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{u(\gamma;z)}(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma,\sigma] - \sigma(\gamma;z)L[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma]).$$

L'équation (4.7) doit être envisagée sur $1^{)}intervalle$ $[z_0^{(\gamma)},z_1^{(\gamma)}]$ et avec la condition initiale

$$(4.8)\qquad \sigma(\gamma;z_0^{(\gamma)}) = \overline{\sigma}(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}),z_0^{(\gamma)}),$$

où $z_0^{(\gamma)}$ (resp. $z_1^{(\gamma)}$) est la valeur la plus petite (resp. grande) de z sur $\gamma^{(1)}$. La condition (4.8) n'est autre que la condition (2.3) restreinte sur $S_0 \cup S_a$ et exprimée par rapport à $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$. Sur $\gamma^{(2)}$, en utilisant la fonction $m_\gamma^{(2)}(z)$ et les notations $\sigma(\gamma;z)$, $h_{gl}(\gamma;z)$, $u(\gamma;z)$ tout analogues (avec $m_\gamma^{(2)}(z)$ au lieu de $m_\gamma^{(1)}(z)$ dans (4.6)), compte tenu de (4.5), l'équation (4.1), de manière tout analogue à (4.7), peut être écrite dans la forme

$$(4.9)\qquad \frac{d\sigma(\gamma;z)}{dz} = -\frac{\sigma(\gamma;z)}{u(\gamma;z)}(m_\gamma^{(2)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z)) + \partial_z u(\gamma;z)) +$$

$$+\frac{m_\gamma^{(2)}(z)}{u(\gamma;z)}(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(2)}(z),z;\sigma,\sigma] - \sigma(\gamma;z)L[m_\gamma^{(2)}(z),z;\sigma]).$$

L'équation (4.9) doit être considérée sur l'intervalle $[0,z_2^{(\gamma)}]$, où $z_2^{(\gamma)}$ est la valeur la plus grande de z sur $\gamma^{(2)}$. Si $\gamma^{(2)} \cap \Sigma = \emptyset$, alors $z_2^{(\gamma)} = 1$; si $\gamma^{(2)} \cap \Sigma \neq \emptyset$, alors $z_2^{(\gamma)} = z_\Sigma(\gamma)$. La condition (2.3) se traduit en

$$(4.10)\qquad \sigma(\gamma;z_2^{(\gamma)}) = \sigma(\gamma;1) = \overline{\sigma}(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}),z_2^{(\gamma)})\ \text{ si }\ (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}),z_2^{(\gamma)}) \in S_1.$$

D'autre part, si $(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in \Sigma$, alors la valeur de $\sigma(\gamma; z_2^{(\gamma)})$ doit être égale à la valeur au point $z = z_2^{(\gamma)} = z_1^{(\gamma)}$ de la fonction $\sigma(\gamma; z)$ qui satisfait à (4.7).

Il est utile de rappeler que dans Ω_1 on a $u(m,z) > 0$ et dans Ω_2 on a $u(m,z) < 0$. Donc, même si formellement (4.9) ne diffère de (4.7) que par la présence de $m_\gamma^{(2)}(z)$ au lieu de $m_\gamma^{(1)}(z)$, les signes des facteurs $\frac{\sigma(\gamma;z)}{u(\gamma;z)}$ et $\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{u(\gamma;z)}$ (respectivement $\frac{m_\gamma^{(2)}(z)}{u(\gamma;z)}$) dans leur second membre sont opposés l'un à l'autre.

5. Résolution de l'équation dans $\mathbf{\Omega_1}$

Pour résoudre l'équation (2.1) (ou (3.4)) avec les conditions (2.3), nous la résolvons d'abord dans Ω_1, en supposant que dans Ω_2 la fonction σ est égale à une fonction donnée $\overline{\sigma}$ et puis nous allons résoudre l'équation dans Ω_2 avec la fonction $\sigma = \sigma_1$ dans Ω_1, σ_1 étant la solution obtenue dans l'étape précédente. On cherchera ensuite un point fixe de l'opérateur qui, à $\overline{\sigma}$, associe la solution σ_2 de la seconde étape.

Pour construire la solution $\sigma = \sigma_1$ dans Ω_1 avec la donnée $\overline{\sigma}$ dans Ω_2, on suppose qu'une fonction $\overline{\sigma}(m,z)$ est donnée dans Ω_2 et vérifie la condition

$$(5.1) \qquad 0 \leq \inf \overline{\sigma}(m,z) \leq \sup \overline{\sigma}(m,z) < \infty.$$

Pour préciser les conditions sur l'$existence$ et l'$unicité$ de la solution σ dans Ω_1 avec $\overline{\sigma}$ dans Ω_2, nous posons

$$(5.2) \qquad C_h = \sup |m\partial_m h_{gl}(m,z) + \partial_z u(m,z)|,$$

$$(5.3) \qquad C_\beta = \sup m\beta(m,m').$$

En vertu du lemme 3.3 nous pouvons choisir un $\delta_1 > 0$ tel que

$$(5.4) \qquad \int_{Z\Sigma(\gamma)-\delta_1}^{Z\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'),z')} dz' \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\max\left((C_h + C_\beta \sup_{0\leq z'\leq 1} \|\overline{\sigma}(\cdot,z')\|_{L^1(m_\Sigma(z'),\infty)}), C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m})\right)}.$$

Posons encore

$$(5.5) \qquad M_1 = \sup_{\gamma^{(1)} \in \Gamma(1)} \left\{ \frac{1}{u(\gamma;z)} \middle| (m,z) \in \gamma^{(1)}, z \leq z_\Sigma(\gamma) - \delta_1 \right\}.$$

Proposition 5.1 *On suppose que* $\overline{\sigma}$ *vérifie la condition* (5.1) *et que*

$$(5.6) \qquad \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(S_0 \cup S_a)} < \frac{1}{2\left(e^{c_1} + \frac{c_2}{c_1}(e^{c_1} - 1)\right)}.$$

où

$$(5.7) \qquad c_1 = 2(C_h + C_\beta \sup \|\overline{\sigma}(\cdot,z)\|_{L^1(m_\Sigma(z),\infty)}) M_1,$$

$$c_2 = 2C_\beta M_1(m_\Sigma^+ - \overline{m}),\ \ m_\Sigma^+ = \sup m_\Sigma(z).$$

Alors il existe une fonction $\sigma(m,z) = \sigma_1(m,z)$ qui vérifie dans Ω_1 l'équation (2.1) dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z) \in \Omega_2$ et la condition (2.3) (restreinte à $S_0 \cup S_a$); cette solution est unique dans la classe $L^\infty(\Omega_1)$.

Démonstration. Pour construire la solution σ dans Ω_1, on construit d'abord une approximation successive $\{\sigma^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$, en utilisant la structure de l'équation (4.7) (et de la condition (5.1)). On pose

$$\text{(5.8)} \qquad \sigma^{[0]}(\gamma;z) = \overline{\sigma}(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}), z_0^{(\gamma)})$$

et, si $\sigma^{[n]}$ est bien définie, on pose

$$\text{(5.9)} \qquad \sigma^{[n+1]}(\gamma;z) = \overline{\sigma}(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}), z_0^{(\gamma)}) + G_1(\sigma^{[n]})(\gamma;z),$$

où $G_1(\cdot)$ est l'opérateur intégral défini par

$$\text{(5.10)} \qquad G_1(\sigma)(\gamma;z) = -\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\sigma(\gamma;z')}{u(\gamma;z')}(m_\gamma^{(1)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma;z') + \partial_z u(\gamma;z'))dz' +$$

$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{m_\gamma^{(1)}(z')}{u(\gamma;z')}(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma,\sigma] - \sigma(\gamma;z')L[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma])dz'.$$

Lemme 5.1 *Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ est bien définie et on a*

$$\text{(5.11)} \qquad \|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(\overline{m},m_\Sigma(z))} \leq \frac{2\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}e^{c_1 z}}{1-2\frac{c_2}{c_1}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}(e^{c_1 z}-1)} \ \ pour\ \ 0 \leq z \leq 1.$$

Démonstration On déduit de (5.9) (voir aussi (5.10)) que

$$\text{(5.12)} \qquad |\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \leq \overline{\sigma}((m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}), z_0^{(\gamma)})) +$$

$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{|\sigma^{[n]}(\gamma;z')|}{u(\gamma;z')}|m_\gamma^{(1)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma;z') + \partial_z u(\gamma;z')|dz' +$$

$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{m_\gamma^{(1)}(z')}{u(\gamma;z')}(\frac{1}{2}|K[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma^{[n]},\sigma^{[n]}]| + |\sigma^{[n]}(\gamma;z')L[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma^{[n]}]|)dz'.$$

En écrivant $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}$ et $\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}$ au lieu de $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}$ et $\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(S_0\cup S_1\cup S_a)}$, on déduit de (5.12) (voir aussi (5.2), (5.3)) que

$$\text{(5.13)} \qquad |\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \leq \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty} +$$

$$+(C_h + C_\beta \sup \|\overline{\sigma}(\cdot,z')\|_{L^1(m_\Sigma(z'),\infty)})\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma;z)}dz' +$$

$$+C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m})\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma;z)}dz'.$$

Donc, en vertu de (5.4) et (5.5) on a

$$(5.14)\qquad |\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \leq \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}+$$

$$+\frac{c_1}{2}\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \| \sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz' + \frac{1}{4}\sup \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}+$$

$$+\frac{c_2}{2}\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \| \sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2 dz' + \frac{1}{4}\sup \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty},$$

où c_1 et c_2 sont les constantes définies dans (5.7). Comme (5.13) est valable pour tout $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, en définissant de manière naturelle la fonction $\sigma^{[n+1]}(m,z)$ sur Ω_1 et les normes $\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(\overline{m},m_\Sigma(z))}$ (pour $m_\Sigma(z)$ voir (3.2)), on déduit de (5.14) que

$$(5.15)\qquad \|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}+$$

$$+\frac{c_1}{2}\int_{0}^{z} \| \sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz' + \frac{1}{4}\sup \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}+$$

$$+\frac{c_2}{2}\int_{0}^{z} \| \sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2 dz' + \frac{1}{4}\sup \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}.$$

Considérons la fonction

$$(5.16)\qquad \overline{X}(z) = \frac{2\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty} e^{c_1 z}}{1-2\frac{c_2}{c_1}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}(e^{c_1 z}-1)},\ \ 0 \leq z \leq 1.$$

On constate que $\overline{X}(z)$ vérifie les relations

$$\frac{d}{dz}\overline{X}(z) = c_1\overline{X}(z) + c_2\overline{X}(z),\ \ \overline{X}(0) = 2\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}$$

et donc

$$(5.17)\qquad \overline{X}(z) = 2\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty} + c_1\int_0^z \overline{X}(z')dz' + c_2\int_0^z (\overline{X}(z'))^2 dz'.$$

D'après (5.6) et (5.16) on a également

$$\overline{X}(1) \leq 1.$$

On va montrer que, quelque soit $\in \mathbb{N}$, la fonction $\sigma^{[n]}$ vérifie l'inégalité

$$(5.18)\qquad \|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \overline{X}(z).$$

En effet, pour n$=0$, l'$inégalit\ é$(5.18) résulte immédiatement de la définition (5.8).

Supposons maintenant que $\sigma^{[n]}$ vérifie (5.18). En substituant (5.18) dans (5.15), on a

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty} + \frac{c_1}{2}\int_0^z \overline{X}(z')dz' + \frac{c_2}{2}\int_0^z \overline{X}(z')dz' + \frac{1}{4}\overline{X}(z) + \frac{1}{4}\overline{X}(z),$$

ou, compte tenu de la relation $\overline{X}(z) \leq \overline{X}(1) \leq 1$,

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty} + \frac{c_1}{2}\int_0^z \overline{X}\,(z')dz' + \frac{c_2}{2}\int_0^z \overline{X}\,(z')dz' + \frac{1}{2}\overline{X}(z).$$

Cette inégalité et l'égalité (5.17) entraînent $\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \overline{X}(z)$ pour $z \in [0,1]$, ce qui démontre (5.18) et donc (5.11). Le lemme est démontré.

Suite de la démonstration de la proposition 5.1. En faisant la différence entre la $n+m$-ième approximation $\sigma^{[n+m]}$ et la n-ième approximation $\sigma^{[n]}$, des définitions (5.9) et (5.10) on obtient

$$(5.19) \qquad \sigma^{[n+m]}(\gamma;z) - \sigma^{[n]}(\gamma;z) = \int_{\overline{z}}^{z} \frac{1}{u(\gamma;z')} D(z')dz',$$

où

$$D(z) = (\sigma^{[n+m-1]} - \sigma^{[n-1]})(m_\gamma^{(1)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z) + \partial_z u(\gamma;z)) +$$

$$+\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{2}(K[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n+m-1]},\sigma^{[n+m-1]}] - K[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n-1]},\sigma^{[n-1]}]) +$$

$$-m_\gamma^{(1)}(z)(\sigma^{[n+m-1]}(\gamma;z)L[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n+m-1]}] - \sigma^{[n-1]}(\gamma;z)L[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n-1]}]).$$

D'*après* les définitions (4.2), (4.3) et l'*inégalit é*(5.11) ainsi que l'*hypothèse* sur $\overline{\sigma}$, il existe deux constantes C_0 et C_1 telles que

$$(5.20) \qquad |D(z)| \leq C_0,$$

$$(5.21) \qquad |D(z)| \leq C_1\|\sigma^{[n+m-1]}(\cdot,z) - \sigma^{[n-1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}.$$

Soit ε un nombre réel strictement positif. D'*après* le lemme 3.3 il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$(5.22) \qquad \int_{Z\Sigma(\gamma)-\delta(\epsilon)}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(\gamma;z)}dz' = \frac{\varepsilon}{2eC_0} \ \ \forall \gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}.$$

On pose

$$(5.23) \qquad L_1(\varepsilon) = \gamma^{(1)} \in \Gamma \sup \{\frac{1}{u(\gamma;z)} | (m,z) \in \gamma^{(1)}, z \leq z_\Sigma(\gamma) - \delta(\varepsilon)\}.$$

Des relations $(5.19) - (5.23)$ on déduit que

$$|\sigma^{[n+m]}(\gamma;z) - \sigma^{[n]}(\gamma;z)| \leq L_1(\varepsilon)C_1 \int_0^z \|\, \sigma^{[n+m-1]}(\cdot,z') - \sigma^{[n-1]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz' + \frac{\varepsilon}{2e},$$

d'où

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,z) - \sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq$$

$$\leq L_1(\varepsilon)C_1 \int_0^z \|\, \sigma^{[n+m-1]}(\cdot,z') - \sigma^{[n-1]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}dz' + \frac{\varepsilon}{2e}.$$

En répétant une procédure analogue, on arrive à l'inégalité

$$(5.24) \qquad \|\sigma^{[n+m]}(\cdot,z)-\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq (L_1(\varepsilon)C_1)^n \frac{z^n}{n!}\|\sigma^{[m]}-\sigma^{[0]}\|_{L^\infty(\Omega_1)} + \frac{\varepsilon}{2e}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}.$$

Comme, en vertu du lemme 4.1, il existe un $n_\in \in \mathbb{N}$ tel que

$$(L_1(\varepsilon)C_1)^n \frac{z^n}{n!}\|\sigma^{[m]}-\sigma^{[0]}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_\in,$$

on déduit de (5.24) que

$$(5.25) \qquad \|\sigma^{[n+m]}(\cdot,z)-\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \varepsilon \ \ \forall n \geq n_\in, \ \forall m \geq 1.$$

c'est–à–dire, $\{\sigma^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans la topologie de $L^\infty(\Omega_1)$ et donc, quand n tend vers l'infini, $\sigma^{[n]}$ converge vers une fonction $\sigma = \sigma_1$ dans $L^\infty(\Omega_1)$.

Il n' est pas difficile à démontrer que la limite $\sigma = \sigma_1$ satisfait à l'équation(2.1) dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z) \in \Omega_2$ et à la condition (2.3) et que la solution est unique.

6. Résolution de l'équation dans Ω_2

Maintenant on se propose de résoudre l'équation (2.1) dans Ω_2, en supposant que dans Ω_1 la fonction σ est égale à une fonction donnée $\overline{\sigma}$ (plus tard on substituera à $\overline{\sigma}$ la solution σ_1 de l'équation (2.1) dans Ω_1 avec $\overline{\sigma}$ donnée dans Ω_2).

De manière analogue au cas relatif à Ω_1, on suppose que

$$(6.1) \qquad 0 \leq \ \inf \overline{\sigma}(m,z) \leq \ \sup \overline{\sigma}(m,z) < \infty$$

et, à l'aide du corollaire du lemme 3.3 on choisit un $\delta_2 > 0$ tel que

$$(6.2) \qquad \int_{z_2^{(\gamma)}-\delta_2}^{z_2^{(\gamma)}} \frac{1}{|u(m_\gamma^{(2)}(z'),z')|}\,dz' \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\max\left((C_h + C_\beta\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m})), C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m})\right)}$$

(C_h et C_β sont les constantes introduites *dans* (5.2) et (5.3)) et nous posons

$$(6.3) \qquad M_2 = \sup_{\gamma^{(2)}\in\Gamma^{(2)}} \left\{\frac{1}{|u(\gamma;z)|} \,\middle|\, (m,z) \in \gamma^{(2)}, z \leq z_2^{(\gamma)} - \delta_2\right\}.$$

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution $\sigma = \sigma_2$ dans Ω_2, nous supposons, de manière analogue à (5.6), que

$$(6.4) \qquad \max\left(\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(S_1)}, \|\overline{\sigma}|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\right) \leq \frac{1}{2(e^{c_3}+\frac{c_4}{c_3}(e^{c_3}-1))},$$

où $\overline{\sigma}|_\Sigma$ est la restriction de $\overline{\sigma}$ à Σ et

$$(6.5) \qquad c_3 = 2(C_h + C_\beta\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}))M_2, \ \ m_\Sigma^+ = \ \sup m_\Sigma(z),$$

$$c_4 = 2C_\beta M_2(\overline{m} - m_\Sigma^-),\ \ m_\Sigma^- = \ \inf m_\Sigma(z).$$

$$\overline{m} = \ \gamma^{(2)} \in \Gamma \sup,\{m_\gamma^{(2)}(0) | m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}) \leq \overline{m}\}.$$

Proposition 6.1. On suppose que les conditions (6.1) et (6.4) sont vérifiées. Alors il existe une fonction $\sigma(m,z) = \sigma_2(m,z)$ qui vérifie dans Ω_2 l'équation (2.1) dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z) \in \Omega_1$ et la condition (2.3) sur S_1 et la condition $\sigma(m,z) = \overline{\sigma}(m,z)$ pour $(m,z) \in \Sigma$; cette solution σ est unique dans la classe $L^\infty(\Omega_2)$.

Démonstration. Comme pour la proposition 5.1, nous allons utiliser la forme (4.9) sur $\gamma^{(2)}$ de l'équation. Or, dans le cas où le point de départ $(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)})$ de $\gamma^{(2)}$ se trouve sur Σ, nous posons la condition

$$(6.6) \quad \sigma(\gamma; z_2^{(\gamma)}) = \overline{\sigma}(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \text{ si } (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in \Sigma,$$

tandis que, dans le cas où $(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in S_1$, nous considérons la condition (4.10) déjà introduite précédemment. Toujours comme dans la démonstration de la proposition 5.1, on construit une approximation successive $\{\sigma^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$. On choisit $\sigma^{[0]}(\gamma; z)$ égale à la donnée initiale (4.10) ou (6.6), c'est-à-dire

$$(6.7) \quad \sigma^{[0]}(\gamma; z) = \overline{\sigma}(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}),$$

où

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma} \text{ si } (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in \Sigma,\ \overline{\sigma} = \overline{\sigma} \text{ si } (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in S_1,$$

et, si $\sigma^{[n]}$ est bien définie, on pose (avec la même notation $\overline{\sigma}(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)})$ utilisée dans (6.7))

$$(6.8) \quad \sigma^{[n+1]}(\gamma; z) = \overline{\sigma}(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) + G_2(\sigma^{[n]})(\gamma; z),$$

où $G_2(\cdot)$ est défini par

$$(6.8) \quad G_2(\sigma)(\gamma; z) = -\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{\sigma(\gamma; z')}{u(\gamma; z')} (m_\gamma^{(2)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma; z') + \partial_z u(\gamma; z'))dz' +$$

$$+ \int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{m_\gamma^{(2)}(z')}{u(\gamma; z')} (\frac{1}{2} K[m_\gamma^{(2)}(z'), z'; \sigma, \sigma] - \sigma(\gamma; z') L[m_\gamma^{(2)}(z'), z'; \sigma])dz'.$$

Lemme 6.1. *Quelque soit* $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ *est bien définie et on a*

$$(6.10) \quad \sigma^{[n]}(m, z) = 0 \ \ si \ \ m > \overline{m},$$

$$(6.11) \quad \|\sigma^{[n]}(\cdot, z)\|_{L^\infty(m_\Sigma(z), \overline{m})} \leq \frac{2A_{0,1}e^{c_3 z}}{1 - 2\frac{c_4}{c_3}A_{0,1}(e^{c_3 z} - 1)} \ \ pour \ \ 0 \leq z \leq 1,$$

$$A_{0,1} = \ \max\left(\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(S_1)},\ \|\overline{\sigma}|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\right)$$

Suite de la démonstration de la proposition 6.1. Une fois construite la suite de solutions approchées $\sigma^{[n]}$ vérifiant les relations (6.10), (6.11), on peut procéder de manière tout analogue à la démonstration de la proposition 5.1, en faisant la différence $\sigma^{[n+m]}(\gamma; z) - \sigma^{[n]}(\gamma; z)$ (pour $\sigma^{[n]}$ construites dans le lemme 6.1) comme dans (5.19) et en l'estimant comme dans $(5.20) - (5.25)$, de sorte que la la démonstration de la proposition 6.1 sera complétée.

7. Estimations de σ_1 sur Ω_1 et de σ_2 sur Ω_2

Même si la démonstration des propositions 5.1 et 6.1 contient implicitement (voir les lemmes 5.1 et 6.1) une majoration de la norme de σ_1 dans $L^\infty(\Omega_1)$ et de celle de σ_2 dans $L^\infty(\Omega_2)$, pour nos ultérieurs raisonnements il nous convient d'amé1iorer ces estimations. Nous commençons par la démonstration de la positivité de σ_1.

Lemme 7.1. Soit $\sigma = \sigma_1$ la solution de l'équation (2.1) dans Ω_1, obtenue dans la proposition 5.1 (sous les conditions de la proposition 5.1). Alors on a (7.1) $\quad \sigma_1(m,z) \geq 0 \ \ \forall(m,z) \in \Omega_1$.

A l'aide du lemme 3.3 on choisit un $\theta_1 > 0$ tel que

$$(7.2) \qquad \int_{z_\Sigma(\gamma)-\theta_1}^{z\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'),z')} dz' \leq \frac{1}{4 \max\left(C_h, C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m})\right)}$$

et on pose

$$(7.3) \qquad \mu_1 = \sup_{\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}} \left\{ \frac{1}{u(\gamma; z)} \middle| (m,z) \in \gamma^{(1)}, z \leq z_\Sigma(\gamma) - \theta_1 \right\},$$

$$(7.4) \qquad \alpha_1 = 2C_h\mu_1, \quad \alpha_2 = 2C_\beta\mu_1(m_\Sigma^+ - \overline{m}).$$

On a le lemme suivant.

Lemme 7.2. *Soit $\sigma = \sigma_1$ la solution de* l'équation (2.1) *dans Ω_1, obtenue dans la proposition 5.1* (*sous les conditions de la proposition 5.1*). *Alors on a*

$$(7.5) \qquad \sigma_1(m,z) \leq \overline{A} \ \ \forall(m,z) \in \Omega_1,$$

où

$$(7.6) \qquad \overline{A} = \frac{2e^{\alpha_1}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(S_0 \cup S_a)}}{1 - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(S_0 \cup S_a)}(e^{\alpha_1} - 1)}.$$

Démonstration. On considère de nouveau l'équation (4.7) vérifiée par σ. En vertu de la condition (5.1) et du lemme 7.1 on a

$$\sigma(\gamma; z) L[m_\gamma^{(1)}(z), z; \sigma] \geq 0,$$

ce qui nous permet de déduire de (4.7) que

$$(7.7) \qquad |\sigma(\gamma; z)| \leq \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty} + C_h \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot, z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma; z')} dz' +$$

$$+ C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m}) \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot, z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma; z')} dz',$$

où on a écrit $\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^\infty}$ et $\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}$ au lieu de $\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^\infty}$ et $\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(S_0 \cup S_1 \cup S_a)}$.

L'inégalité (7.7) étant établie, on peut procéder $d^{)}une$ manière analogue à la démonstration du lemme 5.1 (en particulier, à partir de (5.13)), en y remplaçant c_1 et c_2 par α_1 et α_2 définis dans (7.4) (vois aussi (7.2), (7.3)). De la sorte on aura

$$\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \frac{2\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty} e^{a_1 z}}{1-2\frac{a_2}{a_1}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}(e^{a_1 z}-1)} \text{ pour } 0 \leq z \leq 1,$$

d'où le lemme.

Lemme 7.3. Soit $\sigma = \sigma_2$ la solution de l'équation (2.1) dans Ω_2, obtenue dans la proposition 6.1 (sous les conditions de la proposition 6.1) avec $\overline{\sigma} = \sigma_1$ dans Ω_1, où σ_1 est la solution de l'équation (2.1) dans Ω_1 obtenue dans la proposition 5.1. Alors on a

$$(7.8) \qquad \sigma_2(m,z) \geq 0 \ \ \forall (m,z) \in \Omega_1.$$

Démonstration. On procède d'une manière analogue à la démonstration du lemme 7.1. On rappelle d'abord que $\sigma = \sigma_2$ satisfait, sur chaque $\gamma^{(2)} \in \Gamma^{(2)}$, à l'équation(4.9) et que, en vertu de la définition de K, on a

$$\frac{m_\gamma^{(2)}(z)}{u(\gamma;z)} K[m_\gamma^{(2)}(z), z; \sigma, \sigma] \geq 0.$$

Analoguement au cas précédent, on choisit un $\theta_2 > 0$ tel que

$$(7.9) \qquad \int_{Z\Sigma(\gamma)-\theta_2}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{|u(m_\gamma^{(2)}(z'),z')|} dz' \leq \frac{1}{4\max\left((C_h + C_\beta \overline{A}(m_\Sigma^+ - \overline{m})), C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m})\right)}$$

et on pose

$$(7.10) \qquad \mu_2 = \sup_{\gamma^{(1)} \in \Gamma(1)} \left\{ \frac{1}{u(\gamma;z)} \middle| (m,z) \in \gamma^{(1)}, z \leq z_\Sigma(\gamma) - \theta_1 \right\},$$

$$(7.11) \qquad \alpha_3 = 2(C_h + C_\beta \overline{A}(m_\Sigma^+ - \overline{m}))\mu_2, \ \ \alpha_4 = 2C_\beta \mu_2 (m_\Sigma^+ - \overline{m}).$$

On a le lemme suivant.

Lemme 7.4. *Soit* $\sigma = \sigma_2$ *la solution de l'équation* (2.1) *dans* Ω_2, *obtenue dans la proposition 6.1* (*sous les conditions de la proposition 6.1*) *avec* $\overline{\sigma} = \sigma_1$ *dans* Ω_1, *où* σ_1 *est la solution de* l'équation (2.1) *dans* Ω_1 *obtenue dans la proposition 5.1*. *Alors on a*

$$(7.12) \qquad \sigma_2(m,z) \leq \frac{2e^{\alpha_3}\max\left(\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(S_1)}, \overline{A}\right)}{1-2\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\max\left(\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(S_1)}, \overline{A}\right)(e^{\alpha_3}-1)} \ \ \forall (m,z) \in \Omega_2.$$

Démonstration. Comme dans la démonstration du lemme 7.2, on considère L'équation (4.9) vérifiée par σ sur $\gamma^{(2)}$. En vertu des lemmes 7.1 et 7.3 on a $\sigma_1 \geq 0$ et $\sigma_2 \geq 0$, et donc

$$\sigma(\gamma;z) L[m_\gamma^{(1)}(z), z; \sigma] \geq 0.$$

Compte tenu de cette relation, on déduit de (4.9) que

$$(7.13) \qquad |\sigma(\gamma; z)| \leq \max(\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}, \|\sigma_1|_\Sigma\|_{L^\infty}) +$$

$$+(C_h + C_\beta \|\sigma_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m})) \int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot, z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma; z')} dz' +$$

$$+C_\beta(m_\Sigma(z) - \overline{m}) \int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot, z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma; z')} dz'.$$

L'inégalité (7.13) étant établie, on peut procéder d)une manière analogue à la démonstration du lemme 6.1 (en particulier, à partir de (6.12)), en y remplaçant c_3 et c_4 par α_3 et α_4 définis dans (7.11). De la sorte, en rappelant la continuité de σ_1 sur chaque $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, on aura

$$\|\sigma(\cdot, z)\|_{L^\infty} \leq \frac{2 \max(\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}, \|\sigma_1\|_{L^\infty}) e^{a_3 z}}{1 - 2\frac{a_4}{a_3} \max(\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}, \|\sigma_1\|_{L^\infty})(e^{a_3 z} - 1)} \quad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq 1.$$

A l'aide du lemme 7.2 on en déduit le lemme.

8. Existence de la solution dans Ω

Maintenant nous allons chercher la solution du problème (2.1) ou (3.4) comme un point fixe $\overline{\sigma} = \sigma_2$.

On définit d'abord l'opérateur G qui, à $\overline{\sigma}$ associe la solution σ_2 de l'*équation* (2.1) dans Ω_2, plus précisement on pose

$$G = G_1 \circ G_2$$

avec

$$G_2 : L^\infty(\Omega_2) \to L^\infty(\Omega_1)$$

$$\overline{\sigma} \to \sigma_1$$

et

$$G_1 : L^\infty(\Omega_1) \to L^\infty(\Omega_2)$$

$$\sigma_1 \to \sigma_2$$

avec G_1 et G_2 sont définies ci-dessous.

Proposition.8.1. *L'équation* (2.1) *avec la condition* (2.3) *admet une solution dans la classe* $C([0,1], L^\infty(\mathbb{R}^+))$.

Pour démonter cette proposition on utilise le théorème de Schauder. On considère un ensemble B_0

$$B_0 = \{\sigma_2 \in L^\infty(\Omega_2),\ 0 \leq \sigma_2(\overline{m}, z) \leq \overline{Y}(0)\}$$

$$\text{où} \ \ \overline{Y}(0) = \frac{2\|\overline{\sigma}\|_{L(R)^\infty} e^{-c_1'} +}{1 + 2\frac{c_2}{c_1}\|\overline{\sigma}\|_{L(R)^\infty} + (1 - e^{-c_1'})}.$$

et B la fermeture de son convexité (l'ensemble convexe le plus petit qui contient B_0)

$$B = conv\ (G(B_0)) \subset B_0$$

Il est clair que B est un convexe et $G(B) \subset B$. On va montrer que B est compact.

Lemme 8.1. *On note G l'application qui, à $\overline{\sigma} \in B$, associe $\sigma_2 \in B$, telle que*

$$G(\overline{\sigma}) = (G_2 \circ G_1)(\overline{\sigma}) = G_2(\sigma_1) = \sigma_2$$

L'opérateur G est bien défini sur B, et B est compact.

Démonstration. En effet, d'après le lemme 8.1 toutes les fonctions σ_2 de B sont uniformément bornées, donc le premier point du théorème d'$Ascoli$-Arzela est vérifié. Maintenant on va montrer l'équicontinuité de $G(B_0)$.

Lemme 8.2. L'opérateur G *est continu de $L^\infty(\Omega_2)$ dans lui même.*

Démonstration de la proposition 8.1. On voit que a l'opérateur G est continu et d'après le lemme 8.2 la compacité de B est assurée par le théorème d'Ascoli-Arzela. Par conséquent, d'après le théorème de Schauder il existe un élément $\sigma_2 \in L^\infty(\Omega_2)$ tel que $G(\overline{\sigma}) = \overline{\sigma}$, c'est-à-dire $\overline{\sigma} = \sigma_2$. Ce qui achève la démonstration.

3.4. Calcul numérique (mouvement de l'air sur une montagne)

1. Introduction

Nous allons présenter le résultat du calcul numérique des équations stationnaires du mouvement de l'air en une dimension. Les équations considérées concernent la vitesse, la température, la densité et la pression de l'air selon le modèle d'un gaz visqueux et calorifère et représentent un mouvement de l'air qui passe sur une montagne, c'est-à-dire sur des lieux élevés. Dans le cadre d'Analyse fonctionnelle, les équations d'un gaz visqueux et calorifère ont été étudiées par plusieurs auteurs, mais, même dans le cas stationnaire, il reste beaucoup à faire pour établir leurs propriétés fondamentales (parmi les travaux sur le sujet on trouve [25], [3], etc…).

L'objectif de notre travail est de valider le modèle, en reproduisant le profil des quantités physiques à partir des équations, profil conforme aux lois physiques. En effet nous montrons que, suivant notre schéma de calcul, la température descend quand l'air arrive sur la montagne et croît de nouveau quand l'air descend de la montagne, comme prévu par la théorie physique.

Du point de vue technique, nous avons utilisé la méthode de différences finies (pour les généralités de la méthode de différences finies et ses applications aux équations de ce type, voir par exemple [28], [27]). En outre nous avons considéré le problème de Cauchy des équations différentielles ordinaires du second ordre ; la motivation de ce choix est illustrée à la fin du paragraphe 3. La méthode du calcul utilisée dans le présent travail nous à été inspirée par le travail [34].

Nous tenons à exprimer notre gratitude à M^{me} Cravero de l'Université de Turin, qui nous a donné des informations techniques pour le calcul.

2. Equations du mouvement de l'air

Rappelons d'abord les équations générales du mouvement d'un gaz visqueux (voir par exemple [13])

$$\partial_t \varrho + \nabla.(\varrho\, v) = 0, \qquad (2.1)$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v\right) = \eta\nabla v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla.v) - \nabla p - \varrho g e_3, \qquad (2.2)$$

$$\varrho c_v\left(\frac{dT}{dt} + v.\nabla T\right) = \kappa\Delta T - p\nabla.v + \eta\sum_{i;j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla.v\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta(\nabla.v)^2, \qquad (2.3)$$

où $\varrho(x,t)$ désigne la densité de l'air, $v = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$la vitesse de l'air, $T(x,t)$ la température et $p(x,t)$ la pression; en outre, η et ζsont les coefficients de viscosité, κ le coefficient de thermoconductibilité, c_v la chaleur spécifique de l'air, g l'accélération de pesanteur et $e_3 = (0,0,1)^T$. Pour la pression p nous adoptons l'équation

$$p = \frac{R}{\mu_m}\varrho T, \qquad (2.4)$$

où R est la constante universelle des gaz et μ_m la masse molaire moyenne de l'air.

Soit $h(x_1)$ une fonction suffisamment régulière qui représente la hauteur de la surface de la Terre. On va considérer l'écoulement dans une couche proche de la surface $\{x_3 = h(x_1)\}$.

Pour modéliser cet écoulement par des équations en une dimension, définissons la vitesse w le long de la surface $\{x_3 = h(x_1)\}$

$$w = \left(1 + \left(\frac{dh}{dx_1}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(v_1 + \frac{dh}{dx_1}v_3\right), \qquad (2.5)$$

c'est-à-dire w est la composante de la vitesse dans la direction

$$\vec{\xi} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+h'^2}}, 0, \frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}}\right)^T \qquad \left(h' = \frac{d}{dx_1}h(x_1)\right).$$

En outre on a besoin d'introduire la ''section du courant", qui n'est pas définie a priori, et l'effet de la friction avec la surface terrestre. Pour que la ''section du courant", ou l'épaisseur de la couche, soit déterminée de manière cohérente avec la description du mouvement de l'air en dimension 3 représenté par le système d'équations $(2.1) - (2.4)$, il faut qu'elle soit déterminée de sorte que la pression soit fonction de la densité et de la température à l'intérieur de l'écoulement dans la couche considérée coïncide avec celle de l'extérieur. D'autre part pour caractériser l'effet de la friction avec la surface terrestre nous introduisons le terme $-\alpha w$ dans l'équation de la quantité du mouvement.

Dans la suite nous écrivons simplement x au lieu de x_1 et considérons le mouvement stationnaire de l'air dans une couche proche de la surface ou, ce qui est équivalent mais plus facile à imaginer, dans un tuyau que nous construisons dans notre esprit. Désignons donc par $S(x)$ la ‘’section" du courant ou du tuyau, alors en tenant compte des relations entre la longueur dans la direction $\vec{\xi}$ et la dérivée par rapport à x, pour l'écoulement stationnaire de (2.1), on déduit l'équation de continuité ‘’en tuyau."

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varrho(x)S(x)w(x)}{\sqrt{1+h'^2}}\right)=0, \qquad (2.6)$$

Quant à l'équation de la quantité de mouvement, on considère l'équation (2.2) multipliée par $\vec{\xi}$; on y introduit le terme de la friction avec la surface $-\alpha w$ et le gradient de la pression de base $-\gamma$, de sorte que pour w on a

$$\frac{\varrho S}{\sqrt{1+h'^2}}w\frac{d}{dx}w=f_1\frac{d^2w}{dx^2}+f_2w-\frac{R}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varrho S}{\mu_m}T-\frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}}\varrho Sg-\alpha w+\gamma, \qquad (2.7)$$

où

$$f_1=\frac{1}{\sqrt{1+h'^2}}\left[\frac{\eta}{3}\left(3h'^2+4\right)+\zeta\right],$$

$$f_2=\frac{1}{\sqrt{1+h'^2}}h''^2\left[-\frac{\eta}{3}\left(h'^2+4\right)+\zeta\left(2h'^2-1\right)\right]-h'\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)h''',$$

$$\left(h''=\frac{d^2}{dx^2}h(x),\ h'''=\frac{d^3}{dx^3}h(x)\right)$$

L'expression des coefficients de (2.7) résulte des calculs assez longs mais élémentaires.

Pour l'équation du bilan de l'énergie, les calculs des coefficients de (2.3) effectués en tenant compte des relations entre la longueur dans la direction de $\vec{\xi}$ et la dérivée $\frac{d}{dx}$, nous conduisent à

$$\varrho c_v\frac{Sw}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{dT}{dx}=\kappa\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{R}{\mu_m}\varrho T\frac{d}{dx}\left(\frac{wS}{\sqrt{1+h'^2}}\right)+g_1\left(\frac{d}{dx}w\right)^2+g_2w\frac{d}{dx}w+g_3w^2, \qquad (2.8)$$

où

$$g_1=\frac{1}{\sqrt{1+h'^2}}\left(\eta\left(\frac{4}{2}+h'^2\right)+\zeta\right),$$

$$g_2=\frac{-2h'}{(1+h'^2)^2}h''\left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right),$$

$$g_2 = \frac{1}{(1+h'^2)^3} h''^2 \left(\eta(1+\frac{4}{3}h'^2) + \zeta h'^2\right)$$

En vertu de l'équation (2.6), la fonction $\frac{\varrho(x)S(x)w(x)}{\sqrt{1+h'^2}}$ demeure constante. Nous écrivons K_ϱ pour désigner cette constante, c'est-à-dire, on a

$$\frac{\varrho S w}{\sqrt{1+h'^2}} = K_\varrho. \qquad (2.9)$$

Si la fonction $S(x)$ est connue, l'équation (2.9) nous permet de réduire l'inconnue ϱ comme fonction de w ou w comme fonction de ϱ. Dans notre calcul nous allons utiliser l'égalité

$$\varrho = \frac{K_\varrho\sqrt{1+h'^2}}{Sw}. \qquad (2.10)$$

3. Schéma numérique avec une section donnée

Maintenant nous nous proposons de discrétiser les équations; en utilisant l'approximation centrique

$$\frac{dw}{dx}\Big|_{x=i} \approx \frac{w(i+1)-w(i-1)}{2}N$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}\Big|_{x=i} \approx (w(i+1)-2w(i)+w(i-1))N^2$$

pour $i = 1, \dots, N-1$ et analoguement pour T, on écrit la version discrétisée des équations (2.7) et (2.8) dans lesquelles nous substituons la relation (2.10). De (2.7) on obtient l'équation discrétisée

$$k_\varrho \frac{w(i+1)-w(i-1)}{2}N = f_1(i)\big(w(i+1)-2w(i)+w(i-1)\big)N^2 + f_2(i)w(i) - \frac{k_\varrho R}{\mu_m\sqrt{1+h'^2(i)}}\left[\left(\frac{d\sqrt{1+h'^2(i)}}{dx}\right)\frac{T(i)}{w(i)} + \sqrt{1+h'^2(i)}\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{w(i+1)} - \frac{1}{w(i-1)}\right]NT(i) + \frac{\sqrt{1+h'^2(i)}}{2}\frac{T(i+1)-T(i-1)}{w(i)}N\right] - h'(i)k_\varrho g\frac{1}{w(i)} - \alpha w(i) + \gamma, \quad i = 1, \dots, N-1, \qquad (3.1)$$

tandis que de (2.8) on déduit

$$k_\varrho c_v \frac{T(i+1)-T(i-1)}{2}N = \kappa\big[\big(T(i+1)-2T(i)+T(i-1)\big)N^2\big] - R\frac{k_\varrho\sqrt{1+h'^2(i)}}{S(i)\mu_m}\frac{T(i)}{w(i)}\left[S(i)\frac{w(i+1)-w(i-1)}{2}N\left(\frac{1}{\sqrt{1+h'^2(i)}}\right) + S(i)\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+h'^2(i)}}w(i) + \right.$$

$$\left(S(i+1)-S(i)\right)N\frac{1}{\sqrt{1+h'^2(i)}}w(i)\Bigg]+g_1(i)\left(\frac{w(i+1)-w(i-1)}{2}N\right)^2+g_2(i)w(i)\frac{w(i+1)-w(i-1)}{2}N+$$
$$g_3(i)w(i)^2,\quad i=1,\dots,N-1.\qquad(3.2)$$

Pour la commodité du calcul nous réécrivons les équations (3.1) et (3.2) dans la forme

$$w(i+1)\left[\frac{k_\varrho N}{2}-f_1(i)N^2-\frac{k_\varrho R}{2\mu_m}N\frac{T(i)}{w(i)^2}\right]+T(i+1)\left[\frac{k_\varrho R}{2\mu_m}N\frac{1}{w(i)^2}\right]=\frac{k_\varrho}{2}w(i-1)N+f_1(i)\big(-2w(i)+$$
$$w(i-1)\big)N^2+f_2(i)w(i)-\frac{k_\varrho R}{\mu_m\sqrt{1+h'^2(i)}}\left[\left(\frac{d\sqrt{1+h'^2(i)}}{dx}\right)\frac{T(i)}{w(i)}+\sqrt{1+h'^2(i)}\frac{w(i-1)T(i)}{2w(i)^2}N-\frac{\sqrt{1+h'^2(i)}}{2}\frac{T(i-1)}{w(i)}N\right]-$$
$$h'(i)k_\varrho g\frac{1}{w(i)}-\alpha w(i)+\gamma,\quad i=1,\dots,N-1,\qquad(3.3)$$

$$w(i+1)\left[R\frac{k_\varrho NT(i)}{2\mu_m w(i)}-g_2(i)\frac{N}{2}w(i)-g_1(i)\frac{w(i)-w(i-1)}{2}N^2\right]+T(i+1)\left[\frac{k_\varrho c_v}{2}N-\kappa N^2\right]=\frac{k_\varrho c_v}{2}NT(i-1)+$$
$$\kappa[-2T(i)+T(i-1)]N^2-R\frac{k_\varrho\sqrt{1+h'^2(i)}}{S(i)\mu_m}\frac{T(i)}{w(i)}\left[S(i)\frac{-w(i-1)}{2}N\left(\frac{1}{\sqrt{1+h'^2(i)}}\right)+S(i)w(i)\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+h'^2}}(i)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{\sqrt{1+h'^2(i)}}\big(S(i+1)-S(i)\big)Nw(i)\right]-g_1(i)w(i-1)\big(w(i)-w(i-1)\big)\frac{N^2}{2}-g_2(i)w(i)\frac{w(i-1)}{2}N+$$
$$g_3(i)w(i)^2,\quad i=1,\dots,N-1;\qquad(3.4)$$

nous avons également adopté l'approximation

$$g_1(i)\left(\frac{w(i+1)-w(i-1)}{2}N\right)^2\simeq g_1(i)\frac{w(i+1)-w(i-1)}{2}N(w(i)-w(i-1))N$$

du terme non-linéaire pour rendre explicite le schéma numérique.

Si la fonction $S(x)$ est donnée, on peut résoudre le système d'équations (3.3) et (3.4) avec les données des valeurs de $w(0),T(0),w(1),T(1)$, c'est-à-dire comme le problème de Cauchy avec les données initiales $w(0)=a_0$, $T(0)=b_0$, $\frac{dw}{dx}\Big|_{x=0}\approx\big(w(1)-w(0)\big)N=a_1$, $\frac{dT}{dx}\Big|_{x=0}\approx\big(T(1)-T(0)\big)N=b_1$. En effet nous allons le résoudre, en choisissant les valeurs convenables de a_0, b_0, a_1, b_1.

Notre choix d'utiliser la méthode de différences finies pour le problème de Cauchy est motivé avant tout par le fait que, si dans les équations (2.7) et (2.8) on substitue aux coefficients les valeurs raisonnables du point de vue physique, on constate que les coefficients des termes ayant la dérivée première de w et de T sont beaucoup plus grands que ceux des termes diffusifs ayant la dérivée seconde de w et de T; cette circonstance rend difficile l'application de la méthode variationnelle au problème aux limites.

Si nous considérons le problème de Cauchy, le choix des valeurs de $w(0)$ et $T(0)$ sera motivé par la considération physique. D'autre part, nous choisissons les valeurs de $\big(w(1)-w(0)\big)N=a_1$ et $\big(T(1)-T(0)\big)N=b_1$ dans l'esprit de la considération suivante.

On considère l'équation différentielle du second ordre

$$Y'(x) = M(x)Y''(x) + g(Y(x), Y'(x), x), \qquad (3.5)$$

à valeurs dans R^n avec une fonction g régulière et M régulière et petite, et on suppose que

$$Y(0) = Y_0 \in R^n. \qquad (3.6)$$

A l'équation (3.5) on associe l'équation différentielle du premier ordre

$$\bar{Y}'(x) = g(\bar{Y}(x), \bar{Y}'(x), x), \qquad (3.7)$$

et on considère la condition initiale

$$\bar{Y}(0) = Y_0. \qquad (3.8)$$

Maintenant on suppose que le problème de Cauchy (3.7) avec la condition (3.8) admet une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$ est que la solution est régulière, ce qui arrive lorsque g est régulière.

On considère un autre problème de Cauchy

$$\begin{cases} U'(x) = M(x)U''(x) + h(U(x), U'(x), x) + \theta(x), \\ U(0) = Y_0 + \varepsilon_0 \qquad , \; U'(0) = \bar{Y}'_0 + \varepsilon_1 \end{cases} \qquad (3.9)$$

où

$$h(U(x), U'(x), x) = g(U(x), U'(x), x) - M(x)\bar{Y}''(x).$$

Comme $\bar{Y}(x)$ est la solution de (3.7) avec la condition (3.8), il est évident que si $\theta = 0, \varepsilon_0 = 0, \varepsilon_1 = 0$ le problème (3.9) admet la solution $U(x) = \bar{Y}(x)$. On suppose que ce problème est bien posé pour $\theta = 0, \varepsilon_0 = 0, \varepsilon_1 = 0$. Alors pour $(\theta, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$ dans un voisinage de $(0, 0, 0)$ il admettra une unique solution $U(x) = Y(x)$, c'est-à-dire $Y(x)$ sera la solution de (3.5) avec la condition (3.6) et la condition $Y'(0) = \bar{Y}'(0)$.

4. Approximation successive pour la section

Comme nous l'avons mentionnée plus haut, la section du courant $S(x)$ devra être déterminée de telle sorte que la pression déterminée par la densité et la température à l'intérieur de l'écoulement dans le ‘’tuyau" coïncide avec celle de l'extérieur. D'autre part, nous résolvons les équations (3.3) et (3.4) avec la fonction $S(x)$ donnée. Donc pour déterminer la section $S(x)$ de telle sorte que la pression intérieure déterminée directement par la solution des équations (3.3) et (3.4) corresponde à la pression extérieure estimée à l'aide de la densité ϱ obtenue, nous construisons une approximation successive $S^{[n]}, n = 1,2, \ldots$.

Choisissons d'abord $S^{[1]}$ de manière convenable; par exemple nous choisissons

$$S^{[1]}(x) = 1.$$

Cela étant, considérons la n-ième approximation $S^{[n]}$ de la section du courant. En résolvant les équations (3.3) et (3.4) avec $S = S^{[n]}$, on obtient la solution $(w, T) = (w^{[n]}, T^{[n]})$. On obtient également

$$\varrho^{[n]} = \frac{K_\varrho \sqrt{1+h'^2}}{S^{[n]} w^{[n]}},$$

(voir (2.10)). Cela étant, nous définissons la pression extérieure estimée $\tilde{p}^{[n+1]}$ par

$$\tilde{p}^{[n+1]}(x) = \bar{p}_0 - \int_0^x g\varrho^{[n]}(x') \, \frac{dh(x')}{dx'} dx', \qquad (4.1)$$

c'est-à-dire, estimée sur la base de la distribution verticale de $\varrho^{[n]}$. A partir de la pression extérieure estimée $\tilde{p}^{[n+1]}$et de la température $T^{[n]}$ on définit la densité corrigée

$$\tilde{\varrho}^{[n+1]} = \frac{\mu_m \, \tilde{p}^{[n+1]}}{RT^{[n]}}$$

et, en utilisant la loi de la conservation de la masse (2.9), on définit la $(n+1)$-ième approximation $S^{[n]}$de la section du courant

$$S^{[n+1]} = \frac{K_\varrho \sqrt{1+h'^2}}{w^{[n]} \tilde{\varrho}^{[n+1]}}. \qquad (4.2)$$

De cette manière on définit l'approximation successive $S^{[n]}, n = 1,2, \ldots$ de S.

5. Résultat du calcul numérique

Nous avons effectué le calcul selon le schéma illustré ci-dessus, en choisissant le domaine $0 \le x \le 2.10^5 m$ devisé en 200 pas $(i = 0, 1 \ldots 200), w(i = 0) = w(i = 1) = 2\, m/s$, $T(i = 0) = T(i = 1) = 293{,}15^\circ K$ et

$$h(x) = \begin{cases} \left(\frac{x - 10^5}{4.10^4} + 1\right)^4 \left(\frac{x - 10^5}{4.10^4} - 1\right)^4 & si \quad 6.10^4 \le x \le 140.10^4 \\ 0 & autrement. \end{cases},$$

En outre nous avons utilisé les valeurs suivantes : l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}8\, gm^2/s^2$, la constante universelle des gaz $R = 8{,}31\,.10^7 erg/mole.K$, la masse moléculaire moyenne de l'air $\mu_m = 28{,}96\; g/mole$, la chaleur spécifique $c_v = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu_m}$, la pression au point initial $(i = 0)$ 1013 $mbar$ [dans le calcul nous utilisons la constante conventionnelle K_ϱ calculée à partir de pression au point initial et la densité ϱ est calculée par (2.10)], le coefficient de friction $\alpha = 0.1$ et le gradient de pression de base $\gamma = 0.2$ [ça correspond à la différence de 0.4 mbar de la pression en $200Km$]. Quant aux coefficients de viscosité η, ζ et thermoconductibilité κ, nous avons utilisées les valeurs $120, 40, 100$ respectivement; mais le résultat du calcul dépend très peu de ce choix.

Les résultats du calcul sont illustrés dans les figures insérées ci-dessous. On remarque en particulier que, au point $i = 100$, qui correspond à la hauteur $1000m$, la température T atteint approximativement $283{,}37^\circ K$, c'est-à-dire par rapport au point $i = 1$ correspondant à la hauteur $0m$ la température est descendue de

9,80 $degrés$, ce qui correspond presque parfaitement à la descente théoriquement calculée de la température due à la transformation adiabatique de l'air sans humidité.

En ce qui concerne la stabilité numérique, nous avons constaté que le schéma numérique proposé ci-dessus jouit d'une très bonne stabilité. En effet, comme nous l'avons évoqué en haut, les résultats sont très stables par rapport au changement des coefficients de viscosité η, ζ et thermoconductibilité κ, ce qui confirme le fait que la structure principale des équations est donnée par la dérivée première et que les termes de la dérivée second demeurent petits. En outre, quelque soit $S^{[1]}$ choisi dans le voisinage de 1, les solutions approchées $w^{[n]}$, $T^{[n]}$ convergent, numériquement, très rapidement vers la même solution.

Conclusion

Des résultats forts intéressantes ont été obtenus (**publications et communications ci-jointes**), relatifs à l'étude mathématique, et l'approximation numérique de notre modèle avec les variantes que nous avons considérées et nous jugeons que les objectifs ci-dessous ont été atteints à travers une illustration de nos résultats à savoir :

1- Une compréhension approfondie des phénomènes microphysiques concernant la formation des gouttelettes et des morceaux de glace dans l'atmosphère.

2- Elaboration d'un modèle mathématique complet assez cohérent et objectif, modélisant les phénomènes atmosphériques en présence de toutes les transitions de phase gaz-liquide-solide et en considérant les six étapes des processus (condensation, évaporation, fusion, solidification et sublimation), tout en prenant en considération toutes les paramètres physiques présentes à savoir la température, la pression ,les gouttelettes, les morceaux de glaces, la chaleur latente et le phénomène de radiation lors de la description des processus macro et micro-physiques.

3- Mise en place d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires en dimension 3 sur la base des lois de comportement (conservation de la masse, conservation de la quantité du mouvement et conservation de l'énergie). Ce système a été validé en démontrant l'existence et l'unicité de sa solution.

4- Des variantes du modèle mis en place et qui concerne l'étude de la condensation tel que le modèle monodimensionnel relatif à la chute de pluies ainsi que le modèle bidimensionnel stationnaire avec une condition d'entrée en présence d'un vent horizontal ont été élaborés et validés (existence et unicité démontrés) avec un choix de conditions aux bords naturelles (qui correspondent à la situation réelle de l'atmosphère).

5- Une variante du modèle obtenu en (1-b) et qui concerne la formation des nuages sur une montagne a été étudié et validé. Une approximation numérique et un algorithme pour aboutir à une description réelle de la formation du nuage sur une montagne ont été élaborés, et les résultats obtenus concordant avec les résultats expérimentaux et statistiques de physiciens et météorologue. Une étude stochastique de certaines équations du modèle à été effectuée ou l'existence d'une mesure invariante à été démontré.

6- Une étude approfondie du phénomène pluie en considérant le processus de coagulation couplé a la condensation et la vitesse de la chute et déterminer seulement par la force gravitationnelle, la friction entre les gouttelettes et l'air en présence d'un vent vertical, à été réalisée avec des résultats fort intéressantes, qui nous ont permis de comprendre le phénomène des orages qui auront lieu dans les régions semi-désertique, ce qui nous a éclairé sur le phénomène de la désertification en Algérie qui est étroitement lie à la circulation de l'eau dans l'atmosphère.

Bibliographie

[1] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de 1‘air avec la transition de phase de 1‘eau. *Sci. Techn. Univ. Constantine* -A, vol. 31 (2011), pp. 9-17.

[2] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. :Solution globale de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute. A paraître sur *Rend. Sem. Torino.*

[3] Benabidallah, R., Taleb, L., Fujita Yashima, H. : Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection. Bollettino U.M.I. vol. (8) 10-B (2007), pp. 1101-1124

[4] Brezis, H. : *Analyse fonctionelle* (*Thorie et applications*), Masson, 1987.

[5] Escobedo, M., Mischler, S., Rodriguez Ricard, M. : On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models. *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, vol. 22 (2005), pp. 99-125.

[6] Escobedo, M., Velazquez, J.J.L.: On the fundamental solution of a linearized homogeneous coagulation equation. *Comm. Math. Phys.*, vol. 297 (2010), pp. 759-816.

[7] Escobedo, M., Mischler, S., Perthame, B. : Gelation in coagulation and fragmentation models. *Comm. Math. Phys.*, vol. 231 (2002), pp. 157-188.

[8] Fournier, N., Laurençot, Ph. : Existence of self-similar solutions to Smoluchowski's) coagulation equation. *Comm. Math. Phys.*, vol. 256 (2005), pp. 589-609.

[9] Fujita Yashima, H. : Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua. *Rev. Invest. Operac.*, vol. 34 (2013), pp. 93-104.

[10] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Système d‘équations d‘un modèle du mouvement de 1‘air impliquant la transition de phase de 1‘eau dans 1‘atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. 2 (2011), pp. 66-92.

[11] Kikoine, A. K., Kikoine, I. K. : *Physique mole'culaire* (traduit du russe). Mir, Moscou,1979.

[12] Kolmogorov, A. N., Fomine, S. V. : *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionelle* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1974.

[13] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6) (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.

[14] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Ural‘tseva, N. N. : *Linear and quasi-linear equations of parabolic type* (translated from Russian). Amer. Math. Soc., 1968.

[15] J.-L. Lions, R. Temam, S. Wang : New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications. *Nonlinearity* vol. 5 (1992), pp. 237-288.

[16] L. T. Matveev: *Physique de l'atmosphère* (en russe). Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.

[17] Martchouk, G. I., Dymnikov, V. P., Zalesnii, V. B., Lykosov, V. N., Galin, V. Ya.: Modélisation mathématique de la circulation générale de l'atmosphère et de l'océan(en russe). Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984.

[18] Melzak, A. Z. : A scalar transport equation. *Transactions AMS*, vol. 85 (1957), pp. 547-560.

[19] Merad, M., Belhireche, H., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire de de l'équation coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*. vo1129 (2013), pp 205-224.

[20] Mischler, S. : Contributions à $1^{)}\acute{e}tude$ mathématique de quelques modèles issus de la physique hors équilibre. *Thèse d'habilitation*, Univ. Versailles Saint-Quentin, 2001.

[21] Mischler, S., Rodriguez Ricard, M. : Existence globale pour l'équation de Smolu-chowski continue non homogène et comportement asymptotique des solutions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I, Math., vol. 336 (2003), pp. 407-412.

[22] Müller, H. : Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation. *Kolloidchem. Beib*., vol. 27 (1928), pp. 223-250.

[23] Niethammer, B., Velazquez, J.J.L. : Optimal bounds for self-similar solutions to coagulation equations with multiplicative kernel. A paraitre sur *Commun. PDE*.

[24] Niethammer, B., Velazquez, J.J.L. : Self-similar solutions with fat tails for Smolu-chowski)s coagulation equation with locally bounded kernels. *Comm. Math. Phys*., vol. 318 (2013), pp. 505-532; Erratum: *Comm. Math. Phys*., vol. 318 (2013), pp. 533-534.

[25] Novotn_y, A., Padula, M. : Existence et unicité de la solution stationnaire des équations d'un fluide compressible visqueux et calorifère en présence d'une grande force extérieure potentielles et d'une petite non-potentielle (en russe). Sibir. Mat. Zhurnal, 34 (1993), pp. 120-146.

[26] Prodi, F., Battaglia, A. : *Meteorologia-Parte Π, Microffisica*. Grafica Pucci, Roma, 2004. (voir aussi le site: http $://www$. meteo. uni-bonn. de/mitarbeiter/battaglia/teaching. html).

[27] Samarskii, A. A., Vabishchevich : Méthodes numériques pour la résolution des problèmes de convection-diffusion, 4ed. (en russe). Librokom (Moscou), 2009.

[28] Samarskii, A. A. : Théorie des schémas de différences finies (en russe). Nauka (Moscou), 1977.

[29] S. Selvaduray, H. Fujita Yashima : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati: gassoso, liquido e solido. *Quaderno Dip. Mat. Univ. Torino* (2010).

[30] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. : *Physique de l'atmosphère* (en chinois). Publ. Univ. Pékin, Pékin, 2003.

[31] Smoluchowski, M. : Drei Vorträge über Diffusion, Brownische Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. *Phys. Zeits*., vol. 17 (1916), pp. 557-585.

[32] Solonnikov, V. A. : Sur le problème aux conditions initiales et aux limites pour les équations du mouvement d'un fiuide visqueux compressible (en russe). *Zapiski Nauch. Sem. LOMI*, vol. 56 (1976), pp. 128-142.

[33] Voloshtchuk, V. M. : *The'orie cine'tique de coagulation* (en russe). Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984.

[34] Vlasov, V. I., Skorokhod, S. L., Fujita Yashima, H. : Simulation of air flow in a typhoon lower layer. Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, vol. 26 (2011), pp. 85-111.

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمـــهوريـــــة الجـــزائـــريـــة الديمقراطيــــة الشعبيــــة

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique **Université 8 mai 45 Guelma**	**وزارة التعليم العالي و البحث العلمي** **جامعة 8 ماي 45 قالمة**

Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation

مخبر الرياضيـــات التطبيقيـــة و النمذجـــة

Bilan Final du projet «PNR»

ANNEXE

« Bilan financier du projet »

« Publications, Communications et justificatifs »

1. Bilan financier du projet PNR :

Chapitres	Crédits Alloué (DA)	Crédits Consommé (DA)	Reliquat(DA)
Renouvellement du matériel informatique, achat accessoires, logiciels et consommable informatique **(A.II/02)**	300 000,00 DA	225 000,00 DA	75 000,00 DA
Papeterie et fournitures de bureau **(A.III/04)**	150 000,00 DA	100 000,00 DA	50 000,00 DA
Documentation et Ouvrages de recherche **(A.III/06)**	1 000 000,00 DA	960 000,00 DA	40 000,00 DA
Impression et édition **(A.IV/01)**	50 000,00 DA	-	50 000,00 DA
Total(DA)	1 500 000,00 DA	1 285 000,00 DA	215 000,00 DA

2. Bilan Scientifique (publications, communications et soutenances) :

1- Publications Internationales	
01	**Asma Ayachi, Mohamed Zine Aissaoui et Hisao Fujita Yashima**, *Calcul numérique pour le système d'équations monodimentionnelles du mouvement de l'air passant sur une montagne*, Quaderno, N. 9/**2011**, Dip. Ma. Univ. Torino. **Editor-in-chief:** P. Lamberti, L. Garbolino, A. Oliaro URL : http://www.dm.unito.it/quadernidipartimento/quaderni.php
02	**Hisao Fujita Yashima, Valentina Campana et Mohamed Zine Aissaoui**, *Système d'équations d'un model du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau*. Annales Math. Africaines, Vol. 2 (**2011**), pp 66-92. **Editor-in-chief:** Daouda SANGARE, ISSN : 2218-4414 URL : http://afrimathsannals.com/lang1/articles_2011.html
03	**Hisao Fujita Yashima, S. Selvaduray, *Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati: gassoso, liquido e solido*, Acc. Sci. Torino, Memorie Cl. Sc. FMN. Serie V, vol. 35 (2011), pp. 37-69.**
04	**Hanane Belhireche, Mohamed Zine Aissaoui., Hisao Fujita Yashima**, *Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute*, Rendiconti del Seminario Matematico Università e politecnico di Torino, **2012**. **Editor-in-chief:** Marino Badiale, ISSN : 0373-1243 (printed version) URL : http://seminariomatematico.dm.unito.it/rendiconti/
05	**Meriem. Merad, Hanane Belhireche et Hisao Fujita yashima**, *Solution Stationnaire de l'équation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal*. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* 129 (**2013**), 205--224. **Editor-in-chief:** Andrea D'Agnolo, **ISSN** : 0041-8994, e-ISSN: 2240-2926 URL : http://rendiconti.math.unipd.it/forthcoming.php?lan=english
06	**Nawel Messaadia et Hisao Fujita Yashima**, *Solution stationnaire du système d'équations de la radiation et de la température dans l'air*. *Serdica Math. J.* **39** (**2013**), no. 1, 17--36. **Editor-in-chief:** V. Drensky & S. L. Troyanski, **ISSN** : **1310-6600** URL : http://www.math.bas.bg/serdica/n1_13.htm
07	**Hisao Fujita Yashima, *Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase de agua*. Rev. Invest. Operac., vol. 34 (2013),no 2, pp. 93-104.** **Editor-in-chief:** Sira Allende, ISSN : 0257-4306 URL : http://rev-inv-ope.univ-paris1.fr/
08	**Rym Benseghir, Hisao Fujita Yashima,** *Mesure invariante pour l'équation stochastique du mouvement d'un gaz visqueux en une dimension avec la discrétisation du domaine*. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **58** (**2013**), no. 2, 149--162. **Editor-in-chief:** VASILE BRÎNZĂNESCU & MIHAI PUTINAR, ISSN : 0035-3965 URL : http://csm.ro/reviste/Revue_Mathematique/home_page.html

2- Publications Nationales	
01	**<u>Belhireche.H,</u> <u>Aissaoui, M. Z.</u>, <u>Hisao Fujita Yashima</u>,** Equations monodimentionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau, Sciences Technologie Univ. Constantine, vol.31 (**2011**), pp. 9-17. URL : revue.umc.edu.dz/index.php/component/attachments/download/497

3- Communications Internationales	
01	**<u>AISSAOUI Mohamed Zine</u>**. *Modélisation mathématiques du mouvement de l'air avec transition de phase de l'eau : gaz-liquide-solide*, **TAMTAM'11**, 23-26 Avril **2011**, **Sousse, Tunisie**
02	**<u>Belhireche.H, Aissaoui.M.Z, Fujita Yashima.H</u>,** *Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute Equation de Smoluchowski*, 8eme Rencontre d'analyse Mathématiques et ses Applications **RAMA8**, 26-29 Novembre **2012,** Université **Houari Boumediene** Alger.
03	**Belhireche.H,** *Stabilité de la solution de l'équation de coagulation des gouttelettes en une dimension spatiale, Giornata di Studi Italo-Algerina 19-dec-***2012**, *Université de* ***Turin, Italie***
04	**<u>H. FUJITA YASHIMA</u>**. *Mathematical modeling of the motion of atmospher with phase transition of water*, 10th International Conference on Operations Research, *La Habana, March 6th – 9th*, ***2012***.
05	**<u>Ellaggoune Fateh</u>** and **Zenkoufi Housseyn,** *Local solution of the system of equations describing the motion of water in the desert areas*, The Algerian-Turkish International days on Mathematics 2012, **ATIM'2012**, 9 - 11 October **2012**, Badji Mokhtar – **Annaba** University, Algeria.
06	**<u>Asma Ayachi</u>**, *Equation du mouvement de l'air avec la formation de nuages et simulation numérique, Giornata di Studi Italo-Algerina 19-dec-***2012**, *Université de* ***Turin, Italie.***
07	**Merad Meriem**, **<u>M.Z. Aissaoui, H. Fujita Yashima</u>**, *Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal, et quelques considérations concernant le vent vertical*, 8eme Rencontre d'analyse Mathématiques et ses Applications **RAMA8**, 26-29 Novembre **2012**, Université Houari Boumediene Alger.
08	**<u>H. FUJITA YASHIMA</u>,** *Equations of motion of the atmosphere with phase transition of water*, Mathematical hydrodynamics and parabolic equations, *September 11-14*, **2013**, *Steklov Mathematical institute in St. Petersburg, Russia.*

4- Communications Nationales	
01	**<u>M.Z. Aissaoui, H. Fujita Yashima</u>**, Quelques résultats relatifs au modèle de l'atmosphère en présence de la transaction de phase de l'eau, Journées Nationales sur les Mathématiques Appliquées **JNMA'11,** 29 et 30 Novembre **2011,** l'Université 20 Août 1955 **Skikda** ;
02	**H. ZENKOUFI**, **<u>F. Ellaggoune et M. Z. AISSAOUI</u>**, *Modélisation mathématique de la circulation de l'eau dans les régions désertiques*, Journées Nationales sur les Mathématiques Appliquées **JNMA'11,** 29 et 30 Novembre **2011,** l'Université 20 Août 1955 **Skikda**.
03	**<u>F. Ellaggoune</u>, H. ZENKOUFI et <u>M. Z. AISSAOUI</u>**, *Modélisation mathématique du mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau gaz-liquide-solide,* Journées Nationales sur les Mathématiques Appliquées **JNMA'11,** 29 et 30 Novembre **2011,** l'Université 20 Août 1955 **Skikda**.
04	**<u>F. Ellaggoune</u>**, *Analyse mathématique et numérique de la dynamique des gaz visqueux,* La journée nationale sur les mathématiques appliquées **JNMA'11**, 21 Novembre **2011**, **Bordj Bou Arréridj.**
05	**<u>H. FUJITA YASHIMA</u>,** *Modélisation mathématique du mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau : résultats obtenus et perspectives*, 1er Workshop International sur les mathématiques appliqués et la modélisation, **WIMAM'2011,** 25 et 26 septembre **2011**, Université de **Guelma**, Algérie.
06	**H. ZENKOUFI**, **<u>F. Ellaggoune</u>** et **<u>H. Fujita Yasima</u>**, *Modélisation mathématique d'une trombe d'aire (Tornade)*, 1er Workshop International sur les mathématiques appliqués et la modélisation, **WIMAM'2011,** 25 et 26 septembre **2011**, Université de **Guelma**, Algérie.
07	**A. AYACHI, <u>M. Z. AISSAOUI et H. FUJITA YASHIMA</u>,** *Calcul numérique pour le système d'équations monodimensionnelles du mouvement de l'air passant sur une montagne*, 1er Workshop International sur les mathématiques appliqués et la modélisation, **WIMAM'2011,** 25 et 26 septembre **2011**, Université de **Guelma**, Algérie.
08	**M. MERAD, <u>M. Z. AISSAOUI et H. FUJITA YASHIMA</u>,** *Solution stationnaire avec une vitesse du vent constante - Etude de*

	gouttelette en chutte , 1er Workshop International sur les mathématiques appliqués et la modélisation, **WIMAM'2011,** 25 et 26 septembre **2011**, Université de **Guelma**, Algérie.
09	**H. BELHIRECHE, M. Z. AISSAOUI et H. FUJITA YASHIMA,** *Etude des gouttelettes en chutte - Solution globale en dimension verticale* -, 1er Workshop International sur les mathématiques appliqués et la modélisation, **WIMAM'2011,** 25 et 26 septembre **2011**, Université de **Guelma**, Algérie.
10	**N. MESSAADIA, M. Z. AISSAOUI et H. FUJITA YASHIMA,** *Solution stationnaire du système d'équations de la radiation et de la température dans l'air*, 1er Workshop International sur les mathématiques appliqués et la modélisation, **WIMAM'2011,** 25 et 26 septembre **2011**, Université de **Guelma**, Algérie.
11	**Asma Ayachi**, **Mohamed Zine Aissaoui et Hisao Fujita Yashima**, Simulation numérique d'un système d'équations du mouvement de l'air, Journées Nationales sur les Mathématiques Appliquées **JNMA'11,** 29 et 30 Novembre **2011,** l'Université 20 Août 1955 **Skikda**.
12	**Merad. Meriem**, **M.Z. Aissaoui**, **H. Fujita Yashima** « Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute et lemme fondamental de l'intégration», Journées Nationales sur les Mathématiques Appliquées **JNMA'11,** 29 et 30 Novembre **2011,** l'Université 20 Août 1955 **Skikda**.
13	**Belhireche.H**, *Etude de la solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute*, Première Journée « Jeunes chercheures en Mathématiques, 03 Juillet **2011**, Université 8 Mai 1945 **Guelma**.
14	**Belhireche, H.**, **Aissaoui, M. Z.**, **Fujita Yashima. H**, Equation de coagulation des gouttelettes en chute et lemme fondamentale de l'intégration, Journées Nationales sur les Mathématiques Appliquées **JNMA'11,** 29 et 30 Novembre **2011,** l'Université 20 Août 1955 **Skikda**.
15	**H. FUJITA YASHIMA,** *Modélisation mathématique du mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau : résultats obtenus et perspectives*, 1er Workshop International sur les mathématiques appliqués et la modélisation, **WIMAM'2011,** 25 et 26 septembre **2011**, Université de **Guelma**, Algérie.
16	**H. FUJITA YASHIMA,** *Modélisation stochastique dans la mécanique des fluides et de la dynamique de populations-épidémiologie*, Journées Scientifiques du Laboratoire de Mathématiques Pure et Appliquées **« LMPA »**, 09-11 Janvier **2011, Université de Tizi-Ouzou,** Algérie
17	**A. AYACHI, M. Z. AISSAOUI et H. FUJITA YASHIMA,** *La formation de nuages qui passe sur une montagne et simulation numérique*, 2ème Workshop International sur les Mathématiques Appliquées et la Modélisation **WIMAM'2012**, 23 et 24 Septembre **2012**, Université de **Guelma**, Algérie.
18	**A. AYACHI, M. Z. AISSAOUI et H. FUJITA YASHIMA,** *Equations monodimentionnelles du mouvement de l'air et simulation numérique*, Congrès des Mathématiciens Algériens ***CMA'2012***, 07 et 08 mars **2012**, Université *d'***Annaba, Algérie.**
19	**F. Ellaggoune**, *Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute avec le vent horizontal*, La journée nationale sur les mathématiques appliquées **JNMA'12**, 27 Novembre **2012**, **Bordj Bou Arréridj.**
20	**Merad Meriem**, **M.Z. Aissaoui**, **H. Fujita Yashima**, Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec un vent vertical, 2ème Workshop International sur les Mathématiques Appliquées et la Modélisation **WIMAM'2012**, 23 et 24 Septembre **2012**, Université de **Guelma**, Algérie.
21	**Merad. Meriem**, **M.Z. Aissaoui**, **H. Fujita Yashima**, *Etude de l'équation de coagulation de coagulation de gouttelettes avec le vent horizontal et quelques considération concernant le vent vertical*, Deuxième Journée "jeunes chercheures en Mathématiques, le 19 juin **2012**, l'Université 8 Mai 1945 **Guelma**.
22	**Merad. Meriem**, **M.Z. Aissaoui, H. Fujita Yashima**, *Solution stationnaire de l'équation de continuité des gouttelettes en chute avec le vent horizontal*, Congrès des Mathématiciens Algériens ***CMA'2012***, 07 et 08 mars **2012**, *Université d'***Annaba, Algérie.**
23	**H. BELHIRECHE, M. Z. AISSAOUI et H. FUJITA YASHIMA,** *Solution globale de mouvement de l'air dans le cas d'équilibre hydrostatique,* Congrès des Mathématiciens Algériens ***CMA'2012***, 07 et 08 mars **2012**, Université *d'***Annaba, Algérie.**
24	**H. BELHIRECHE, M. Z. AISSAOUI et H. FUJITA YASHIMA,** *Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute*, 2ème Workshop International sur les Mathématiques Appliquées et la Modélisation **WIMAM'2012**, 23 et 24 Septembre **2012**, Université de **Guelma**, Algérie.

25	**Belhireche. H., Aissaoui, M. Z, Fujita Yashima. H**, *Comportement asymptotique de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute et l'équation de Smoluchowski*, Deuxième Journée « Jeunes chercheures en Mathématiques », Juin **2012**, Université 8 Mai 1945 **Guelma.**
26	**H. FUJITA YASHIMA,** *Equations du type elliptique dans la dynamique des gaz, Journées Equations Différentielles en l'Honneur de Mohand Arezki Moussaoui, Alger, 12 – 14 mai **2012***
27	**F. Ellaggoune,** *Turbulence et opérateur de moyenne locale dans les équations des fluides visqueux,* Workshop de Probabilités et Statistique à la mémoire du Professeur Seid Bahlali, 29 et 30 Janvier **2013**, **Université Mohamed Khider, Biskra.**
28	**M. Benssaad, F. Ellaggoune et H. Fujita Yashima**, *Modélisation mathématique de l'interaction atmosphère -radiation-*, 3ème Workshop International sur les Mathématiques Appliquées et la Modélisation **WIMAM'2013**, 25-26 Septembre **2013,** *Université de* **Guelma, Algérie.**
29	**M. MERAD, H. FUJITA YASHIMA et M.Z. AISSAOUI**, *Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelette se déplacent avec le vent,* 3ème Workshop International sur les Mathématiques Appliquées et la Modélisation **WIMAM'2013**, 25-26 Septembre **2013,** *Université de* **Guelma, Algérie.**
30	**W. KAIDOUCHI, M.Z. AISSAOUI et H. FUJITA YASHIMA**, *Existence et unicité de la solution de l'équation de coagulation-fragmentation des gouttelettes en chute ;* 3ème Workshop International sur les Mathématiques Appliquées et la Modélisation **WIMAM'2013**, 25-26 Septembre **2013,** *Université de* **Guelma, Algérie.**
31	**S. GHOMRANI, H. FUJITA YASHIMA et M.Z. AISSAOUI** *Equation du mouvement d'un cyclone tropical -mouvement vertical de l'air avec la condensation de la vapeur dans la phase initiale- ;* 3ème Workshop International sur les Mathématiques Appliquées et la Modélisation **WIMAM'2013**, 25-26 Septembre **2013,** *Université de* **Guelma, Algérie.**
32	**A. AYACHI, M. Z. AISSAOUI, H GUEBBAI et H. FUJITA YASHIMA**, Etude d'un système d'équation décrivant certains mouvement stationnaire en une dimension d'un gaz visqueux et calorifère*;* 3ème Workshop International sur les Mathématiques Appliquées et la Modélisation **WIMAM'2013**, 25-26 Septembre **2013,** *Université de* **Guelma, Algérie.**
33	**H. BELHIRECHE et M. Z. AISSAOUI,** *Stabilité de la solution de l'équation de continuité des gouttelettes en chute*, Workshop sur la Modélisation Mathématiques et Contrôle, 20-22 Mai **2013, Annaba**
34	**A. AYACHI, M. Z. AISSAOUI**, Simulation numérique de la formation de nuages par le vent qui passe sur une montagne, Workshop sur la Modélisation Mathématiques et Contrôle, 20-22 Mai **2013, Annaba**
35	**H. FUJITA YASHIMA,** Modélisation stochastique des phénomènes météorologiques et environnementaux, Workshop de Probabilités et Statistique à la mémoire du Professeur Seid Bahlali, 29 et 30 Janvier **2013**, **Université Mohamed Khider, Biskra.**
36	**H. FUJITA YASHIMA,** *Equation des gouttelettes qui tombent dans l'air,* 3ème Workshop International sur les Mathématiques Appliquées et la Modélisation **WIMAM'2013**, 25-26 Septembre **2013,** *Université de* **Guelma, Algérie.**

5- Mémoires de master soutenus

Num : 01	Nom & Prénom de l'étudiant	**KAIDOUCHI Wahida**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2012**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie
	Rapporteur	**Mohamed Zine Aissaoui**
	Intitulé du titre du master	*Equations de continuité pour les trois états de l'eau dans l'atmosphère*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 02	Nom & Prénom de l'étudiant	**LOUAFI Bassem**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2012**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie
	Rapporteur	**Mohamed Zine Aissaoui**
	Intitulé du titre du master	*Equation décrivant le processus microphysique et cinétique du mouvement de l'air*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 03	Nom & Prénom de l'étudiant	**GHOMRANI Sarra**

	Date et lieu de soutenance	Juin **2012**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie
	Rapporteur	**Mohamed Zine Aissaoui**
	Intitulé du titre du master	*Equations du modèle mécanique-thermodynamique d'un cyclone tropical*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 04	Nom & Prénom de l'étudiant	**HARRAT Aicha**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2012**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie.
	Rapporteur	**Mohamed Zine Aissaoui**
	Intitulé du titre du master	*Equations de l'écoulement de sang dans les corps animaux*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 05	Nom & Prénom de l'étudiant	**Ellaggoune Selma**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2013**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie
	Rapporteur	**Mohamed Zine Aissaoui**
	Intitulé du titre du master	*Solution stationnaire de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute avec le vent horizontal*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 06	Nom & Prénom de l'étudiant	**Kamouche Nesrine**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2013**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie
	Rapporteur	**Mohamed Zine Aissaoui**
	Intitulé du titre du master	*Equation de coagulation –fragmentation des gouttelettes*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 07	Nom & Prénom de l'étudiant	**Bazine Imen**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2013**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie
	Rapporteur	**Mohamed Zine Aissaoui**
	Intitulé du titre du master	*Modélisation mathématique des phénomènes de grêle*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 08	Nom & Prénom de l'étudiant	**NEBTI Abdelghani**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2012**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie.
	Rapporteur	**Hisao Fujita Yashima**
	Intitulé du titre du master	*Solution globale des équations du mouvement de l'air*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 09	Nom & Prénom de l'étudiant	**GUEMAR Soufyane**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2012**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie.
	Rapporteur	**Hisao Fujita Yashima**
	Intitulé du titre du master	*Equations de l'écoulement de l'air engendrant des nuages*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz

Num : 10	Nom & Prénom de l'étudiant	**KAOUR Rima**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2012**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie.
	Rapporteur	**Hisao Fujita Yashima**
	Intitulé du titre du master	*Equations du mouvement d'un fluide non-newtonien et applications*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 11	Nom & Prénom de l'étudiant	**BATAH Meryem**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2012**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie.
	Rapporteur	**Hisao Fujita Yashima**
	Intitulé du titre du master	*Processus de coagulation de gouttelettes (équation de Smoluchwski)*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 12	Nom & Prénom de l'étudiant	**MEKNASSI Amira**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2012**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie.
	Rapporteur	**Hisao Fujita Yashima**
	Intitulé du titre du master	*Equations des effets de la radiation dans l'atmosphère*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 13	Nom & Prénom de l'étudiant	**AIOUNI Hamza**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2012**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie.
	Rapporteur	**Hisao Fujita Yashima**
	Intitulé du titre du master	*Etude du problème de Stokes dans la formulation courant-tourbillon*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 14	Nom & Prénom de l'étudiant	**R/S. CHARRIFFAINI**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2013**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie
	Rapporteur	**Hisao Fujita Yashima**
	Intitulé du titre du master	*Modèle mathématique de l'interaction atmosphère-biosphère*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 15	Nom & Prénom de l'étudiant	**Salah Selma**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2013**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie
	Rapporteur	**Hisao Fujita Yashima**
	Intitulé du titre du master	*Equation de la convection atmosphérique*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 16	Nom & Prénom de l'étudiant	**Hallaci Khadidja**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2013**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie
	Rapporteur	**Hisao Fujita Yashima**
	Intitulé du titre du master	*Equation du mouvement de deux fluides compressible et incompressible avec une inter-surface libre*

	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 18	Nom & Prénom de l'étudiant	**Meryem Benssaad**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2012**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie.
	Rapporteur	**Ellaggoune Fateh**
	Intitulé du titre du master	*Turbulence et opérateur de moyenne locale dans les équations des fluides visqueux*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz
Num : 19	Nom & Prénom de l'étudiant	**Wissame SELMANI**
	Date et lieu de soutenance	Juin **2013**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma, Algérie.
	Rapporteur	**Ellaggoune Fateh**
	Intitulé du titre du master	*Modélisation mathématique de la circulation de l'eau dans les régions désertiques*
	URL résumé ou version pdf	www.univ-guelma.dz

6- Autres valorisations des activités de recherche	
Conférences Nationales	Première Journée "jeunes chercheures en Mathématiques, 3 juillet **2011**, Université 8 Mai 1945 **Guelma**.
	Deuxième Journée "jeunes chercheures en Mathématiques, le 19 juin **2012**, Université 8 Mai 1945 **Guelma**.
	Troisième Journée "jeunes chercheures en Mathématiques, le 15 juin **2013**, Université 8 Mai 1945 **Guelma**.
Conférences Internationales	International Conference on Pure and Applied Mathematics, **ICPAM'12**, 28-30 Mai **2012,** Université de **Guelma** Algérie.
	1er Workshop International sur les mathématiques appliqués et la modélisation, **WIMAM'2011,** 25 et 26 septembre **2011**, Université de **Guelma**, Algérie.
	2ème Workshop International sur les Mathématiques Appliquées et la Modélisation **WIMAM'2012**, 23 et 24 Septembre **2012**, Université de **Guelma**, Algérie.
	3ème Workshop International sur les Mathématiques Appliquées et la Modélisation **WIMAM'2013**, 25 et 26 Septembre **2013**, Université de **Guelma**, Algérie

Contribution Scientifique du Projet a la Formation et à la Coopération

Le projet a donné lieu à des :

N°	Intitulé	Nombre
01	**Publications Internationales**	**08**
02	**Publications Nationales**	**01**
03	**Communications Internationales**	**08**
04	**Communications Nationales**	**36**
05	**Mémoires de master soutenus**	**19**
06	**Manifestations Scientifiques**	**06**